

Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

Volker Jäkel, 2000

Bei der Synthese von Koppelpunktbahnen (im Schrifttum auch bekannt als Koppelkurven) und deren Optimierung ist es zwingend erforderlich, sich schnell einen Überblick verschaffen zu können, welche Koppelkurven von gegebenen Mechanismen und Getrieben verwirklicht werden. Mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden kann jede periodisch eben bewegte Ebene mit Hilfe der Gangpolkurve, der Übergangskurve und der BALLSchen Kurve in Felder eingeteilt werden, deren Punkte Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten und Wendepunkten aufweisen.

In einer Systematik werden erstmalig alle typischen Verläufe der Gangpolkurven von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben zusammengefaßt und ein Überblick über mögliche Formen von Übergangskurven gegeben. Für Trochoiden erzeugende Getriebe wird ein Algorithmus für eine vollständige Feldeinteilung der eben bewegten Ebene vorgestellt.

Homepage: <http://www.v-jaekel.de/>

Vorwort

Zur Nutzung der Erkenntnisse dieser Arbeit wird es in vielen Fällen notwendig sein, Programme zum Berechnen der Übergangskurve und auch der Gangpolkurve zur Verfügung zu haben.

Die von mir im Rahmen dieser Arbeit am Institut für Konstruktion der Universität Gesamthochschule Siegen erstellten Programme sind in ihrer vorliegenden Form nur auf UNIX-Rechnern der Fa. Hewlett-Packard lauffähig. Das gleiche gilt für die in Zusammenhang mit dieser Arbeit von Studenten erstellten Programme. Diese Hardwareabhängigkeit läßt es leider nicht zu, die Programme mit einem vertretbaren Aufwand allen Interessenten nutzbar zu machen.

Für meinen Vortrag im Rahmen der mündlichen Prüfung habe ich jedoch in einer hardwareunabhängigen Sprache (TCL) das Programm DROMEG geschrieben, mit dessen Hilfe ich die Feldeinteilung mit Hilfe der Übergangskurve und der Gangpolkurve anhand verschiedener Getriebebauformen erläutern konnte. Dieses Programm habe ich in leicht modifizierter Form im Internet unter

<http://www.v-jaekel.de>

zur Verfügung stellen. Ich hoffe, daß ich damit Ihnen als Leser den Einstieg zur Nutzung der in dieser Arbeit beschriebenen Erkenntnisse erleichtere.

Mit diesem Schritt möchte ich mich Bedanken bei allen, die mich in meiner Arbeit unterstützt haben. Besonders hervorzuheben ist hierbei Herr Prof. Dr.-Ing. F. J. Gierse als (damaliger) Leiter des Arbeitsgebietes Konstruktions- und Getriebetechnik am Institut für Konstruktion der Universität GH Siegen. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. G. Christen der TU Ilmenau bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferats.

Ebenfalls Bedanken möchte ich mich bei den Studenten, die als studentische Hilfskräfte, Diplom- und Studienarbeiter mit viel Engagement mir zugearbeitet haben. Dank gebührt ebenfalls den Mitarbeitern für die kollegiale, die Arbeit fördernde Zusammenarbeit am Institut.

Zum Schluß möchte ich mich bei meiner Frau Susanne bedanken für das Verständnis, daß sie mir während der langjährigen Arbeit an meiner Dissertation für diese Tätigkeit entgegengebracht hat.

Im Mai 1999

Volker Jäkel

(geringfügig aktualisiert im November 2011)

Inhaltsverzeichnis

I

	Verzeichnis der Abkürzungen.....	IX
1	Einleitung	1
1.1	Einführung in das Thema.....	2
1.2	Ziel dieser Arbeit.....	7
1.3	Stand der Technik.....	7
2	Die Übergangskurve	9
2.1	Der Selbstberührungspunkt	9
2.1.1	Stand der Technik.....	10
2.2	Ermitteln von Doppelpunkten.....	10
2.2.1	Stand der Technik.....	10
2.2.2	Ermitteln des Doppelpunktes der Bahn eines Punktes einer Ebene für zwei beliebige Lagen der Ebene	12
2.3	Die Doppelpunktkurve - Stand der Technik	15
2.4	Die Dreifachpunktkurve - Stand der Technik	17
2.5	Die Übergangskurve und die Selbstberührungskurve.....	18
2.5.1	Die Übergangskurve - Stand der Technik.....	18
2.5.2	Die Selbstberührungskurve.....	21
2.5.3	Sonderfälle der Übergangskurve	21
2.5.3.1	Die Schein-Übergangskurve und die Verzweigungslage	23
2.5.3.2	Der Dauer-Übergangskurvenpunkt	25
2.6	Die Drehpolkurve	26
2.6.1	Die Drehpolkurve - Stand der Technik.....	26
2.6.2	Bemerkungen zur Drehpolkurve	26
2.6.3	Modifikationsmöglichkeiten für das Polortverfahren und deren Grenzen.....	32
2.7	Die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden.....	33
2.7.1	Die gestellfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden.....	33
2.7.2	Die koppelfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden	39
3	Die Eigenschaften von Kurven für die Feldeinteilung einer bewegten Ebene	40
3.1	Die Eigenschaften der Gangpolkurve	40
3.2	Die Eigenschaften der Übergangskurve	47
3.3	Die Eigenschaften der BALLschen Kurve.....	59

3.4	Schnabelspitzen	60
4	Die Feldeinteilung von Trochoiden erzeugenden bewegten Ebenen.....	67
4.1	Trochoiden - Stand der Technik	67
4.2	Die Übergangskurve der Trochoiden	72
4.2.1	Die Ausgangslage für das Ermitteln der Übergangskurve von Epitrochoiden...	73
4.2.2	Ermitteln eines Selbstberührungspunktes der Epitrochoiden mit der Standgetriebe-Übersetzung $i = 4$	76
4.2.2.1	Suche nach einer Ausgangslösung für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes	78
4.2.3	Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von Epitrochoiden mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung	81
4.2.4	Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von periodischen Epitrochoiden	82
4.2.5	Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von periodischen Trochoiden	91
4.2.5.1	Ausgangslösung bei Peritrochoiden für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes	92
4.2.5.2	Ausgangslösung bei Hypotrochoiden für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes	92
4.3	Die BALLSche Kurve der Trochoiden.....	95
4.4	Zweifache Erzeugung geometrisch ähnlicher Trochoiden	97
4.5	Die Feldeinteilung bei Trochoiden	99
5	Ermitteln der Übergangskurve	110
5.1	Die Übergangskurve der viergliedrigen Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken	110
5.1.1	Stand der Technik.....	110
5.1.1.1	Zeichnerische Methode zum Ermitteln von Übergangskurvenpunkten viergliedriger Gelenkgetriebe	110
5.1.2	Zeichnungsfolge-Rechenverfahren zum Ermitteln von Selbstberührungspunkten viergliedriger Gelenkgetriebe	114
5.1.2.1	Das Ermitteln der Drehpolkurve viergliedriger Gelenkgetriebe	115
5.1.2.2	Das Ermitteln der Fokalkurve.....	116
5.1.2.3	Das Ermitteln von Schnittpunkten zwischen zwei durch Punktefolgen gegebenen Kurven	117
5.1.2.4	Transformation der Selbstberührungspunkte in die Koppellebene.....	126
5.1.2.5	Ausfiltern nicht zur Übergangskurve gehörender Lösungen	127
5.1.3	Iterative Verfahren zum Ermitteln der Übergangskurvenpunkte	128
5.1.3.1	Ermitteln der Übergangskurve mit Hilfe der Geraden durch den Doppelpunkt und beide zugehörigen Momentanpole	129
5.1.3.2	Hypothetischer Mechanismus zum Erzeugen eines Übergangskurvenpunktes	130

5.1.3.2.1	Der analytische Anteil des Algorithmus	137
5.1.3.2.2	Der numerische Anteil des Algorithmus.....	145
5.1.3.2.3	Abschätzen der Lage einer neuen Ausgangslösung	145
5.1.3.3	Sonderlagen	147
5.1.3.3.1	Innere und äußere Gestellage	148
5.1.3.3.2	Zweifache innere oder zweifache äußere Gestellage.....	149
5.1.3.3.3	Gestellgerade als Symmetrieachse zweier Getriebebelagen	150
5.1.3.3.4	Identische Lage von An- oder Abtriebsglied innerhalb einer Periode	151
5.2	Die Übergangskurve einer allgemein eben bewegten Ebene	152
5.2.1	Ermitteln der Drehpolkurve	152
5.2.2	Ermitteln des Momentanpols	155
5.2.3	Transformation von Punkten aus der Gestellebene in die Koppellebene.....	156
5.2.4	Ermitteln der Übergangskurve mit Hilfe der Geraden durch den Doppelpunkt und beide zugehörigen Momentanpole	157
5.2.4.1	Algorithmus zum Auffinden aller Übergangskurvenpunkte	158
5.2.4.2	Algorithmus zum Auffinden eines Astes der Übergangskurve	163
5.2.4.3	Finden eines Astes der Übergangskurve mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens.....	168
5.3	Berührungspunkte der Bahnen von Punkten, die zu verschiedenen Ebenen gehören	174
6	Das Einteilen der bewegten Ebene in Felder	175
6.1	Suche von Quasi-Asymptoten, Schnittpunkten und Berührungspunkten	175
6.1.1	Ermitteln des minimalen Abstands eines Punktes von einer Kurve	178
6.1.2	Ermitteln eines Berührungspunktes zwischen zwei Kurven.....	180
6.2	Einteilen der Kurven in Kurvenabschnitte	182
6.3	Verschieben des Endpunktes von Quasi-Asymptoten.....	184
6.4	Ermitteln der Begrenzungen von Feldern	185
6.4.1	Ermitteln der Begrenzungslinien außenliegender Felder	186
6.4.2	Ermitteln der Begrenzungslinien innenliegender Felder	190
6.4.2.1	Algorithmus zum Feststellen, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Feldes liegt.....	191
6.4.2.1.1	Ermitteln des Umlaufsinn eines geschlossenen Polygons ohne Selbstschnittpunkte.....	193
6.4.2.1.2	Ermitteln, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Polygons liegt.....	193
6.5	Ermitteln der Selbstschnittpunkte der Bahnen von Punkten der gefundenen Felder.....	197
6.6	Systematik zu der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe der Gangpol- und der Übergangskurve	199
6.6.1	Stand der Technik.....	200

6.6.2	Systematische Suche nach den typischen Verläufen von Gangpol- und Übergangskurve bei viergliedrigen Gelenkgetrieben	200
6.6.2.1	Selbtschnittpunkte der Gangpolkurve betreffende Grenzfälle umlauffähiger viergliedriger Gelenkgetriebe	204
6.6.2.1.1	Gangpolkurven umlauffähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten	206
6.6.2.1.2	Gangpolkurven umlauffähiger Gelenkgetriebe mit Selbstberührungspunkten	213
6.6.2.2	Gangpolkurven totalschwingfähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten	218
6.6.2.3	Gangpolkurven durchschlagfähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten	224
6.6.2.4	Gangpolkurven totalschwingfähiger und durchschlagfähiger Getriebe mit Dreifachpunkten	227
6.6.3	Systematik der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe der Gangpolkurve	234
6.6.3.1	Der Durchlaufsinn von Koppelpunktbahnen viergliedriger Gelenkgetriebe ohne Selbtschnittpunkte	246
6.6.4	Systematik der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben beim Einbeziehen der Übergangskurve	247
6.6.4.1	Die Übergangskurven von umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben	247
6.6.4.2	Die Übergangskurven von totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken	251
6.6.4.2.1	Bedingung zum Bestimmen, ob eine totalschwingfähige Doppelinenschwinge mit Hilfe eines Zweischlag angetrieben werden kann	255
6.6.4.3	Die Übergangskurven von durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken	257
7	Die BALLsche Kurve	260
7.1	Die Feldeinteilung der Koppellebene mit Hilfe der Gangpolkurve und der BALLschen Kurve	260
8	Zusammenfassung und Ausblick	262
A	Anhang (Parameter der den Bildern zugrunde liegenden Getriebe)	267
	Stichwortekatalog	272
	Literatur	274

Verwendete Abkürzungen und Formelzeichen

Großbuchstaben

Größe	Benennung
A, B	Gelenkpunkte
A', B'	alternative Lage der Gelenkpunkte
A ₀ , B ₀	gestellfeste Gelenkpunkte
A' ₀ , B' ₀	alternative Lagen der gestellfesten Gelenkpunkte
B _a	Gelenkpunkt B in der äußeren Totlage
B _i	Gelenkpunkt B in der inneren Totlage
B _k	Gelenkpunkt B in der inneren Kreuzparallellage
C	Punkt in Koppelebene
D	Doppelpunkt
E	Ebene
F	Punkt der Fokalkurve
F'	zweiter Fokalkurvenpunkt auf dem Fokalkreis
H	Harmonischer Punkt
J, J ₀	Gelenkpunkt, gestellfester Gelenkpunkt
J', J' ₀	alternativer Gelenkpunkt, alternativer gestellfester Gelenkpunkt
K	Koppelpunkt / Punkt einer bewegten Ebene
K _B	Bewegungsbereichskennzahl
K _b	BALLscher Punkt
K _g	Punkt auf der Gangpolkurve, der gerade eine Spitze durchläuft
K _{jd}	Dauer-Übergangskurvenpunkt der kinematischen Umkehrung
K _{min} , K _{max}	Lage von K mit kleinstem / größtem Abstand zu M _R
K _T	Koppelpunkt, der eine Bahn mit drei Spitzen erzeugt
K _ü	Übergangskurvenpunkt, Selbstberührungspunkt
K _{üd}	Dauer-Übergangskurvenpunkt
L, L ₀	Gelenkpunkt, gestellfester Gelenkpunkt
L', L' ₀	alternativer Gelenkpunkt, alternativer gestellfester Gelenkpunkt
M	Mittelpunkt eines Kreises oder einer Strecke
M _G	Mittelpunkt einer kreisförmigen Gangpolkurve
M' _G	alternative Lage des Punktes M _G
M _R	Mittelpunkt einer kreisförmigen Rastpolkurve
P	Punkt oder Momentanpol
P'	alternative Lage des Momentanpols
P ₂₀ , P ₃₁ , P _{x0}	Momentanpol
Q	Punkt
R	Rechteck
S	Schnittpunkt

Kleinbuchstaben

Größe	Benennung
a	Abstand zwischen den Punkten K und M_G
a_b	Abstand zwischen den Punkten K_b und M_G
a_S	Abstand eines Punktes von einer Strecke
$a_{\ddot{u}}$	Abstand zwischen den Punkten $K_{\ddot{u}}$ und M_G
b	Abstand zwischen den Punkten K und M_R
$b_{\text{Geradenname}}$	Ordinatenschnittpunkt einer Geraden
$b'_{\text{Geradenname}}$	Ordinatenschnittpunkt einer Gerade im transformierten Koordinatensystem
e	Versetzung
$f()$	Funktion
$f'()$	Ableitung einer Funktion nach dem Antrieb
g	Gerade
g_a	Asymptote
g_s	Schwingwinkel-Begrenzungsgerade
i	Standgetriebe-Übersetzung oder Schleifenzähler
i_N	Nenner der Übersetzung / Anzahl Umläufe des Steges pro Periode
i_Z	Zähler der Übersetzung / Anzahl an Schlingen, Spitzen oder „abgerundeten Ecken“ pro Periode einer Trochoide
k	Kurve / Bahn, Kreis oder Schleifenzähler
k_b	BALLSche Kurve
k_D	Doppelpunktkurve
k_d	Drehpolkurve
k_f	Flachpunktkurve
k_F	Fokalkurve
k_g	Gangpolkurve
k_j	Übergangskurve der kinematischen Umkehrung
k_{K_i} ($k_{K_b}, k_{K_g}, k_{K_{\ddot{u}}}, k_{K_T}$)	Kurve, die der Punkt K_i ($K_b, K_g, K_{\ddot{u}}, K_T$) erzeugt
$k_{K_{\ddot{u}}}, k_{K_T}$	
k_r	Rastpolkurve
k_s	Selbstberührungskurve
k_t	Dreifachpunktkurve
$k_{\ddot{u}}$	Übergangskurve
$k_{\ddot{u}d}$	Dauer-Selbstberührungskurve
$k_{\ddot{u}s}$	Schein-Übergangskurve
k_w	Wendekreis
	Gliedlängen des längsten Gliedes
	Gliedlängen des kürzesten Gliedes
	Gliedlänge des Gliedes 1 (in Koppel und Gestell gelagertes Antriebsglied)
	Gliedlänge des Gliedes 2 (Koppel)
	Gliedlänge des Gliedes 3 (in Koppel und Gestell gelagertes Abtriebsglied)
	Gliedlänge des Gliedes 4 (Gestell)

	Gliedlängen von Gliedern, die weder das längste noch das kürzeste Glied darstellen
m	Anzahl der Umdrehungen des umlaufenden Rades je Umrollung des feststehenden Rades (je Umdrehung des Steges)
$m_{\text{Geradenname}}$	Ordinatenschnittpunkt einer Gerade
$\max(n_i)$	Anzahl der Übergangskreise
n	Normale oder Natürliche Zahl
n_{an}	Anzahl der Antriebe
n_b	Anzahl an Wendepunkten einer Koppelpunktbahn
n_G	Anzahl der Getriebeglieder
n_i	Nummer existierender Übergangskreise eines Getriebes
n_m	Mittelsenkrechte
n_P	Anzahl beweglicher Punkte eines Mechanismus
n_S	Anzahl an Selbstschnittpunkten einer Koppelpunktbahn
n_{Sd}	Kennzahl für die Verzweigungslagen des Koppelgliedes beim Bestimmen der Anzahl an Selbstschnittpunkten einer Koppelpunktbahn
n_{Sg}	Anzahl der durch die Gangpolkurve erklärbaren Selbstschnittpunkte einer Koppelpunktbahn
$n_{\text{Sü}}$	Anzahl der Übergangskurvenäste, die die Anzahl der Selbstschnittpunkte von Koppelpunktbahnen eines Feldes beeinflussen
n_T	Anzahl an Transformationen
n_{SO}	minimale Anzahl an Selbstschnittpunkten von Koppelpunktbahnen eines Getriebes
p	Parameter
r	Radius
r_B	Radius von kreisförmiger BALLScher Kurve
r_G	Radius von kreisförmiger Gangpolkurve
r_R	Radius von kreisförmiger Rastpolkurve
$r_{\ddot{u}}$	Radius von kreisförmiger Übergangskurve
s	Steg eines Umlaufrädergetriebes
t	Tangente
v	Geschwindigkeit
w	Winkelhalbierende
w_A, w_B	Winkelhalbierende $\ast A'A_0A$ bzw. $\ast B'B_0B$
x, y	Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem
x_M, y_M	Koordinaten eines Kreismittelpunktes
x', y'	transformierte Koordinaten
$\dot{}, \dot{}$	1. Ableitung von x, y nach der Zeit oder nach einer Antriebsgröße (Da es bei den in dieser Arbeit verwendeten Gleichungen keine Rolle spielt, ob die Ableitungen nach der Zeit oder nach einer Antriebsgröße verwendet werden, wird zur Abgrenzung zu transformierten Koordinaten immer der Punkt als Zeichen für die Ableitung verwendet.)
$\ddot{}, \ddot{}$	2. Ableitung von x, y nach der Zeit oder nach einer Antriebsgröße

Griechische Buchstaben

Größe **Benennung**

	Winkel
Δ	Differenz
\triangle	Dreieck
	Winkel zwischen der Koppel und dem Gestell
θ	Winkel für $\theta = 0^\circ$
m	Anteil von θ , der proportional zu θ ist
	Ergänzungswinkel zum Winkel
Δ	Winkel
Δ_{Innen}	Innenwinkel eines Polygons
	Antriebswinkel oder Abtriebswinkel im Gelenk A_0
$\theta_{\text{min}}, \theta_{\text{max}}$	Bei Trochoiden: Winkel zwischen Steg und x-Achse, wenn der Punkt K den kleinsten bzw. größten Abstand zum Punkt M_R aufweist.
θ_g	Antriebswinkel in der für das Ermitteln der Doppelpunktkurve gegebenen Lage
$\theta_{\ddot{u}}$	Winkel zwischen Steg und x-Achse, wenn der Punkt K einen Übergangskurvenpunkt durchläuft
θ_{\parallel}	Übertragungswinkel in der Parallellage der im Gestell gelagerten Glieder
θ_g	Abtriebswinkel in der für das Ermitteln der Doppelpunktkurve gegebenen Lage
	Kreiszahl
	Krümmungsradius

Indizes

Größe **Benennung**

1, 2, 3, ...	Laufende Nummer
i	dient der Unterscheidung einer Punktefolge von einer Funktion. Zur Kennzeichnung eines Punktes der Punktefolge dient die Variable i
geg	gegeben
max	Maximum
min	Minimum

1 Einleitung

Die Getriebetechnik ist im Umbruch begriffen. Zum einen sind durch immer leistungsstärkere Rechner zwei Trends ausgelöst worden:

- Bewegungsanimationen sind immer leichter erzeugbar. Dieser Trend wird dadurch unterstützt, daß zu den meisten CAD-Systemen Kinematik-Module angeboten werden, mit deren Hilfe der Übergang von einer technischen Zeichnung zu einer Animation sehr leicht ist. Diese Systeme erlauben es dem getriebetechnischen Laien, die Bewegungen optisch zu beobachten und ggf. zu variieren.
- Der zweite Trend ist der verstärkte Einsatz von numerischen Verfahren. Dieser Trend wird z. B. den Einsatz von MKS-Programmen¹⁾ als Werkzeug auch für getriebetechnisch nicht speziell ausgebildete Ingenieure erlauben.

Zum anderen setzt sich (in bestimmten Bereichen) der Trend des Zurückdrängens der Getriebetechnik durch elektronische Steuerungen fort.

Alle drei Trends haben gemeinsam, daß sie von getriebetechnik-fremden Experten mitgestaltet werden: Animationen benötigen mehr programmtechnischen als getriebetechnischen Hintergrund. MKS-Systeme werden hauptsächlich von Mechanikern geschrieben. Elektronische Steuerungen werden maßgeblich von Elektrotechnikern entwickelt.

Es deutet sich also an, daß die Erkenntnisse der mathematikorientierten Getriebetechniker zu Beginn dieses Jahrhunderts und der nachfolgenden ingenieurtechnisch geprägten Generation von Getriebetechnikern mit ihren vorwiegend zeichnerischen Lösungen und den daraus hergeleiteten Zeichnungsfolge-Rechenverfahren durch das Zurückgehen dieser Anwendung im 21. Jahrhundert in Vergessenheit geraten. Das darf jedoch nicht geschehen, da die neuen Trends zwar das Entwickeln von Antrieben und Mechanismen für komplizierte Bewegungen durch Spezialisten und auch das Analysieren von Mechanismen und Getrieben (M&G) im allgemeinen erleichtern, aber die Synthese neuer M&G nicht weiterentwickeln.

Die Synthese von Mechanismen ist eine Domäne der Getriebetechnik, und das Ziel der Getriebetechniker muß sein, die Synthese auf der Grundlage des vorhandenen Wissens und unter Einbeziehen neuer Möglichkeiten durch leistungsstärkere Rechner weiterzuentwickeln. Diese Veröffentlichung soll einen Beitrag dazu leisten.

Diese Arbeit beschränkt sich auf ebene Bewegungen und nutzt numerische Verfahren, um das Wissen über die Bewegung von Punkten einer bewegten Ebene zu erweitern. Ohne das Wissen über die in den letzten einhundert Jahren entwickelten Erkenntnisse der Getriebetechnik ist diese Arbeit nicht denkbar. Sie knüpft an die Erkenntnisse der mathema-

¹⁾ Mehrkörper-Simulation-Programm

tikorientierten Getriebetechniker an. Da aber auch beliebige periodische Bewegungen von Ebenen betrachtet werden, sollen hauptsächlich ingenieurwissenschaftliche Betrachtungsweisen herangezogen werden. So werden z. B. beim Ermitteln der Anzahl der Doppelpunkte von Koppelpunktbahnen keine imaginären Doppelpunkte und auch nicht die Bahn des Koppelpunktes in verschiedenen Bewegungsbereichen berücksichtigt, die nur durch Demontieren und erneutes Zusammensetzen von Getriebegliedern erreicht werden können.²⁾

Der praktische Nutzen dieser Arbeit liegt in der Unterstützung der Suche nach Koppelpunktbahnen mit vorgegebenen Eigenschaften, wenn die Bewegung einer allgemein eben bewegten Ebene zum Erzeugen der Bahnen vorgegeben ist. Diese für die Synthese notwendige Erkenntnis wurde z. B. für das Erstellen eines neuen Koppelkurvenatlasses genutzt [1].

1.1 Einführung in das Thema

Nahezu jeder, der zum ersten Mal mit ebenen Bewegungen konfrontiert wird, kommt spontan zu dem Schluß, daß alles über diesen Themenkomplex bekannt sei. Doch bei genauerem Hinsehen fällt auf, daß zwar die Analyse von ebenen Bewegungen vollständig gelöst ist, bei der Synthese jedoch die einfachsten Fragen auf eine Antwort warten. Ist zum Beispiel die ebene Bewegung einer Ebene gegeben und wird danach gefragt, welche Punkte der Ebene Bahnen ohne Selbstschnittpunkte aufweisen - und die sich deshalb z. B. als Anlenkung für einen Antrieb eignen - so ist festzustellen, daß zwar für den aller-einfachsten Fall, nämlich das Abrollen eines Kreises (als Gangpolkurve) auf einem Kreis (als Rastpolkurve), die Antwort bekannt ist. Aber schon bei der einfachsten Form von Gelenkgetrieben, nämlich bei viergliedrigen, ist die Antwort der Wissenschaft unvollständig.

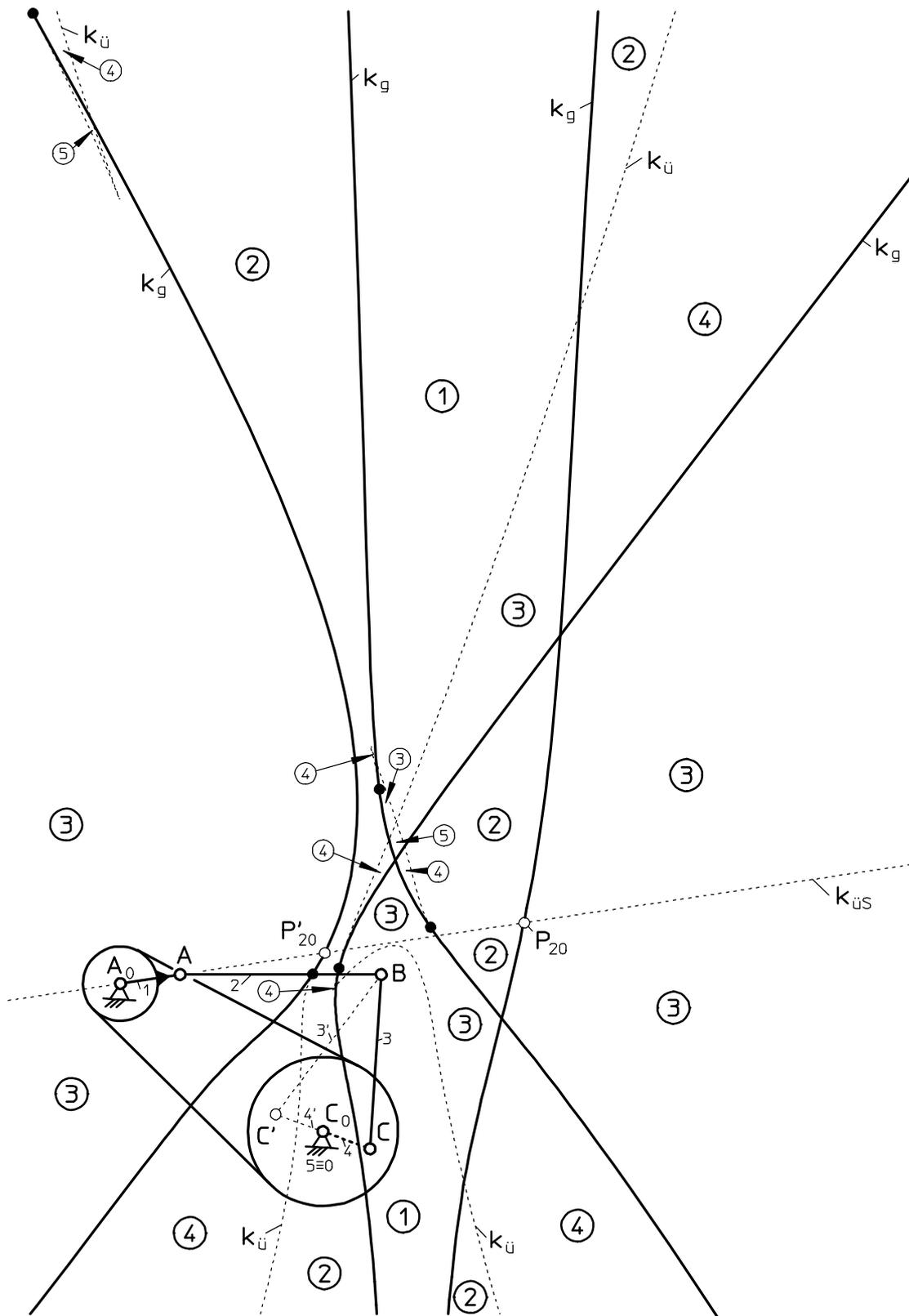
Dabei benannte schon R. MÜLLER 1901 die Kurven, die notwendig sind, um Felder der genannten Eigenschaften zu umgrenzen [2], nämlich die Gangpolkurve k_g ³⁾, die Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ ⁴⁾ (Bild 1.1) und BALLSche Kurve k_b ⁵⁾ (Bilder 1.2 bis 1.4). Erst WESELKOW

²⁾ Aus diesem Grund wird hier die Benennung *Koppelpunktbahnen* und nicht die Benennung *Koppelkurven* verwendet.

³⁾ Die Gangpolkurve ist der geometrische Ort aller Punkte einer eben bewegten Ebene, deren Bahnen eine Spitze durchlaufen.

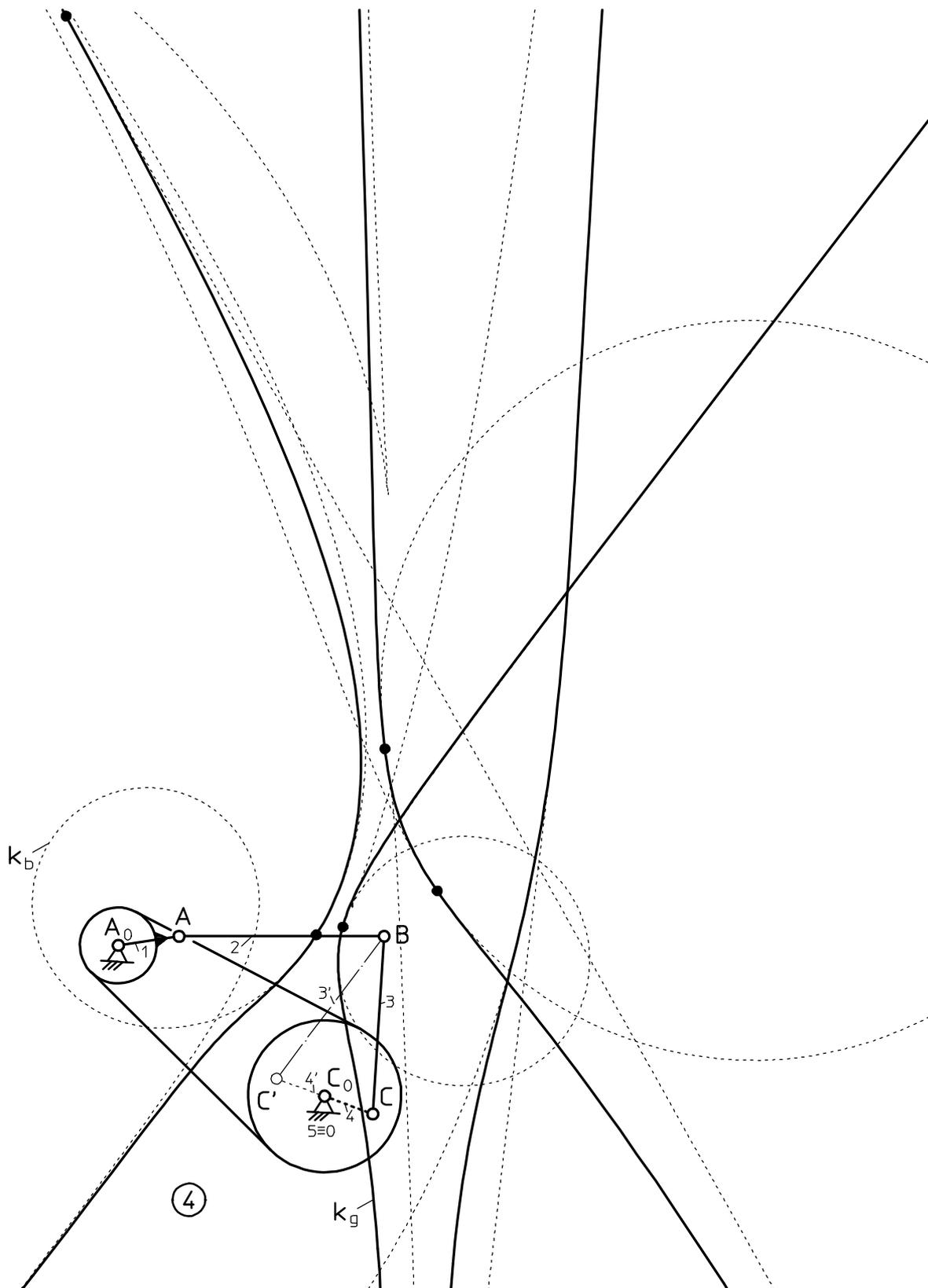
⁴⁾ Die Übergangskurve ist der geometrische Ort aller Punkte einer eben bewegten Ebene, deren Bahnen einen Selbstberührungspunkt (vgl. Bild 2.1, S. 9) aufweisen.

⁵⁾ Die BALLSche Kurve ist der geometrische Ort aller Punkte einer eben bewegten Ebene, deren Bahnen BALLSche Punkte aufweisen. Ein BALLScher Punkt ist dadurch gekennzeichnet, daß der Krümmungsradius seiner Bahn in diesem Punkt unendlich groß ist, ohne daß ein Wendepunkt vorliegt.



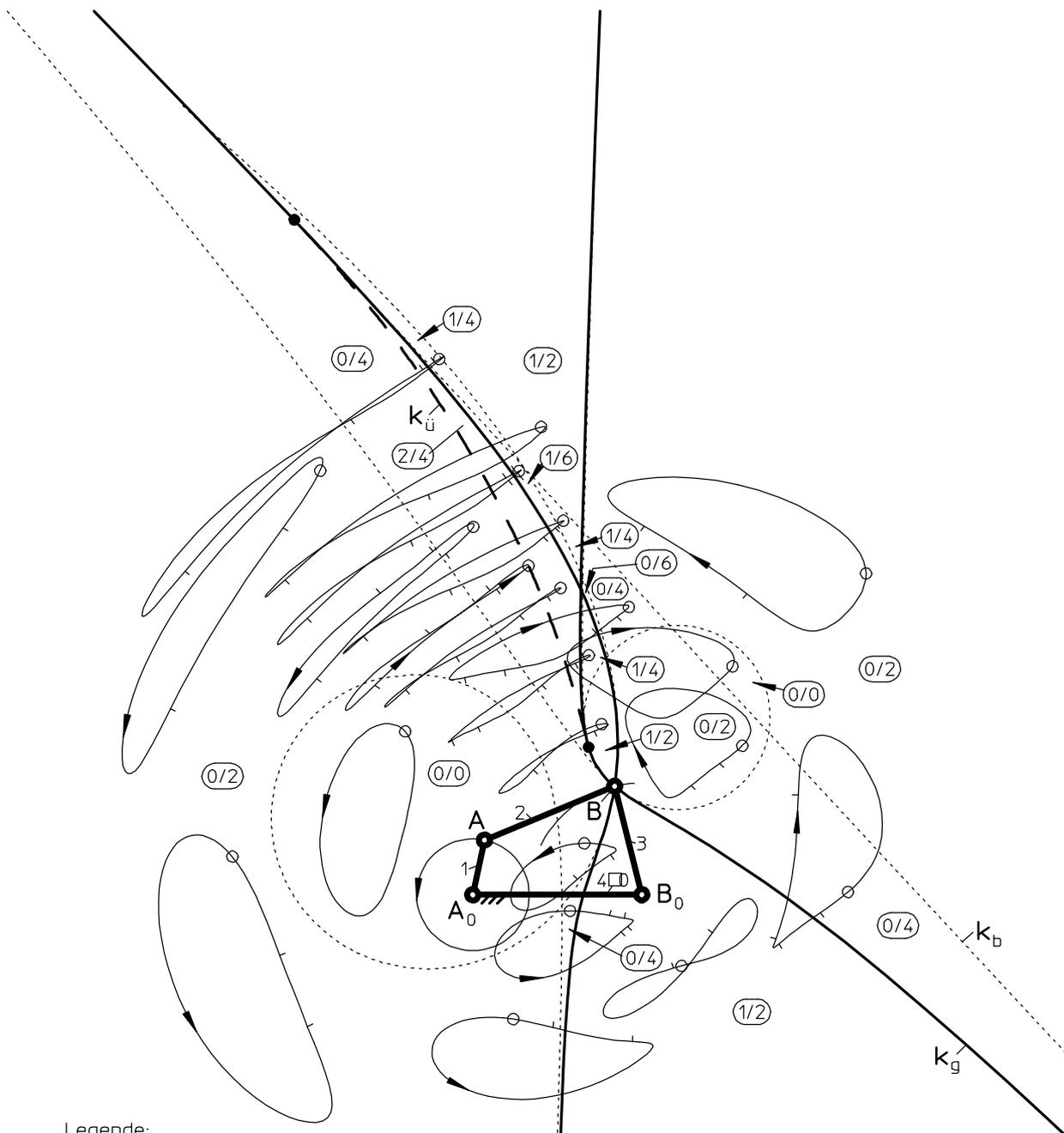
In Kreisen steht jeweils die Anzahl der Schnittpunkte, die die Bahnen aller Punkte eines Feldes aufweisen. Berührungspunkte von Gangpolkurve und Übergangskurve sind durch ausgefüllte Punkte markiert.

Bild 1.1: Die Feldeinteilung mit Hilfe der Gangpolkurve k_g und der Übergangskurve k_u eines um eine Zahnriemenverbindung der Antriebskurbeln 1 und 4 mit $i_{14} = 2$ erweiterten fünfgli. Gelenk-Getriebes



Die zu einer Getriebestellung gehörenden Berührungspunkte von Gangpolkurve und BALLscher Kurve sind durch Punkte markiert.

Bild 1.2: Gangpolkurve k_g und BALLsche Kurve k_b eines um eine Zahnriemenverbindung erweiterten fünfgliedrigen Gelenkgetriebes mit $i_{12} = 2$ (Ausschnitt)



Legende:

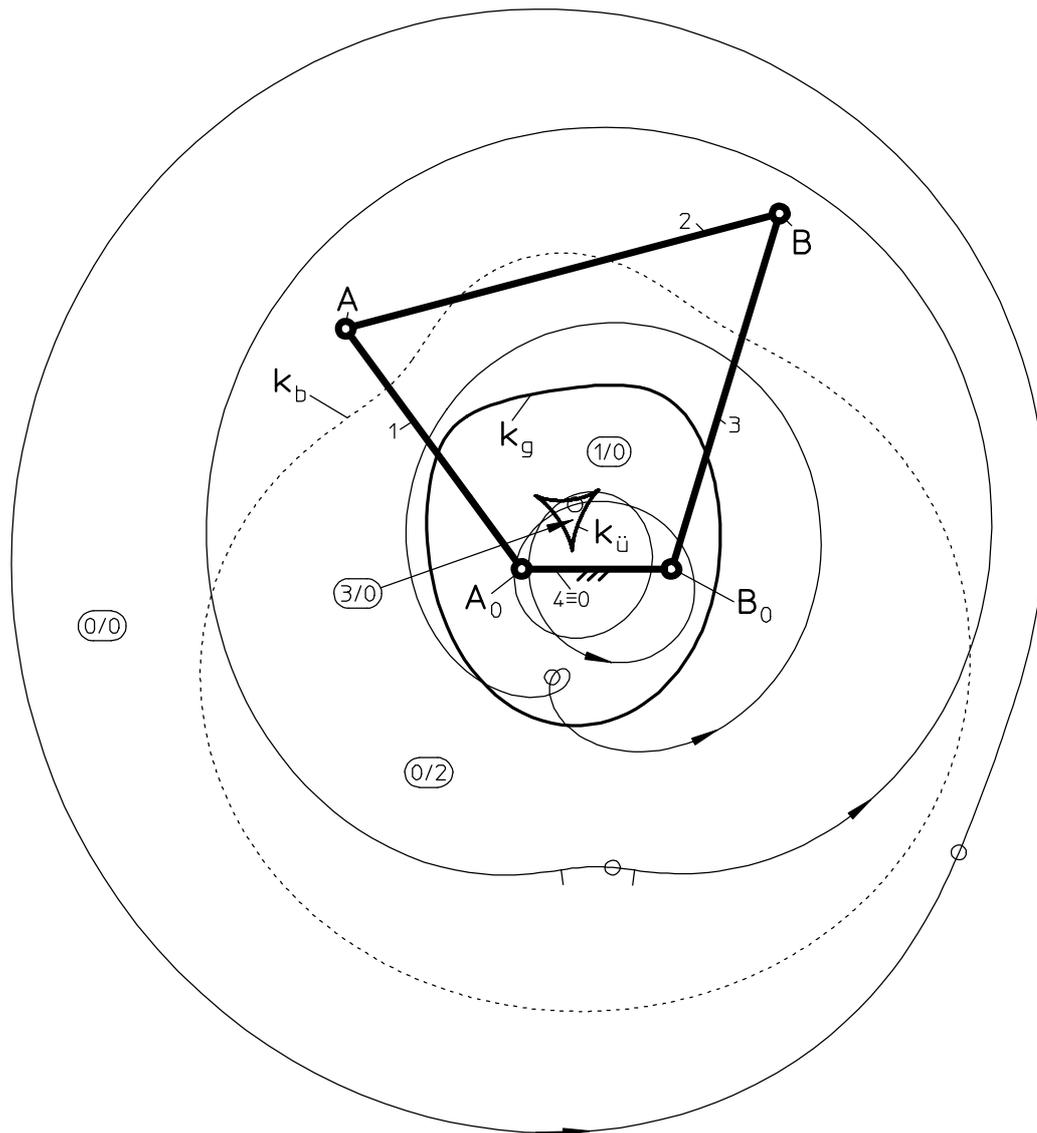
- Koppelpunktbahn
- Koppelpunkt in der momentanen Getriebebestellung
- Durchlaufsinne (nur bei schnittpunktfreien Koppelpunktbahnen)
- Wendepunkt

- Eigenschaften der Koppelpunktbahnen eines Feldes
- Anzahl an Wendepunkten
- Anzahl an Selbstschnittpunkten

- zusätzlich zum Gelenkpunkt B zu einer Getriebebestellung gehörende Berührungspunkte von Gang- und Übergangskurve sowie BALLscher Kurve

Bild 1.3: Feldeinteilung der Koppellebene 2 bei einer Kurbelschwinge durch die Gangpolkurve k_g die Übergangskurve k_u und die Ballsche Kurve k

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve



Legende:

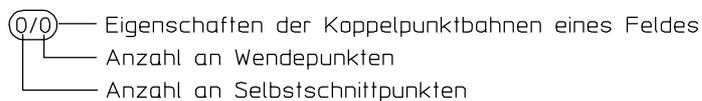
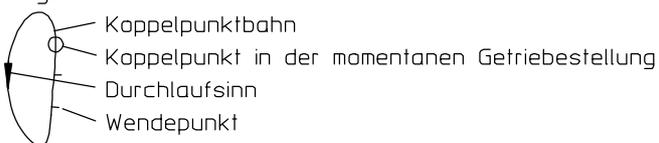


Bild 1.4: Feldeinteilung bei einer Doppelkurbel durch die Gangpolkurve k_g , die Übergangskurve k_u und die Ballsche Kurve k_b

veröffentlichte 1984 die ersten Bilder mit einer Feldeinteilung für ebene Kurbelschwingen, Doppelkurbeln und Schubkurbeln [3]. Allerdings benutzte er hierfür nur die Gangpolkurve, und somit war seine Feldeinteilung unvollständig.

DIZIOĞLU war endlich derjenige, der 1987 die erste vollständige Feldeinteilung mit Hilfe der drei oben genannten Kurven verwirklichte [4] - an einer gleichschenkelig-symmetrischen Totalschwinge mit Sonderabmessungen. Gleichschenkelig-symmetrisch bedeutet hierbei, daß drei von vier Gliedlängen identisch sind, die Sonderabmessung besteht darin, daß das 4. Glied doppelt so lang wie die anderen Glieder ist.

1.2 Ziel dieser Arbeit

Die Aufgabe dieser Dissertation ist es, Verfahren für eine Feldeinteilung an Ebenen zu entwickeln, die eine beliebige periodische, stetig oder hebbbar unstetig differenzierbare, ebene Bewegung ausführen.

Die Feldeinteilung soll zum Ziel haben, die Grenzen von Feldern mit Punkten zu ermitteln, deren Bahnen

- die gleiche Anzahl an Selbstschnittpunkten und
- die gleiche Anzahl an Wendepunkten

besitzen. Solche Felder werden im folgenden *Felder mit Punkten zum Erzeugen qualitativ gleicher Punktbahnen* genannt.

Da die Grundüberlegungen für diese Feldeinteilung zum ersten Mal (durch R. MÜLLER) an viergliedrigen Gelenkgetrieben angestellt wurden, wird im folgenden auch von der *Feldeinteilung einer Koppellebene* gesprochen, wenn die Einteilung einer Ebene in Felder mit den oben genannten Eigenschaften gemeint ist.

1.3 Stand der Technik

R. MÜLLER erkannte 1901, daß drei Kurven für die Feldeinteilung von Koppellebenen verantwortlich sind. Es sind dies

- die BALLSche Kurve⁶⁾,

⁶⁾ Die BALLSche Kurve wurde von R. Müller Flachpunktkurve genannt. Da der Name Flachpunktkurve heute nicht mehr üblich ist, soll er hier für die in die Gestellebene transformierte BALLSche Kurve verwendet werden, für die es keinen eigenständigen Begriff gibt. Der Name Flachpunktkurve wird also im folgenden nur als Abkürzung für *in die Gestellebene transformierte MÜLLERSche Flachpunktkurve* verwendet (vgl. Tabelle 8.1 (Seite 263) !

- die Gangpolkurve und
- die Übergangskurve, die eine Punktefolge aller Selbstberührungspunkte darstellt [2].

R. MÜLLER stellte zeichnerische Verfahren vor, mit deren Hilfe Punkte der drei genannten Kurven von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken ermittelt werden können. Zum Ermitteln von Gangpolkurven und BALLSchen Kurven werden heutzutage hauptsächlich allgemeingültige Verfahren eingesetzt [5], [6].

Von der Übergangskurve konstruierte R. MÜLLER die Selbstberührungspunkte nur in einer Lage der Koppelebene. Da der von ihm vorgeschlagene Algorithmus (ohne Rechner) zu aufwendig für einen praktischen Einsatz war, wurden jedoch keine von der Kreisform [4], [7] abweichenden Übergangskurven ermittelt. 1962 wurden von S. MILLER Versuche unternommen, bei umlauffähigen viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben bei der Feldeinteilung der Koppelebene als Ersatz für die (nicht erwähnte) Übergangskurve die Einhüllende von Kurven zu verwenden [8], deren Punkte Bahnen mit Doppelpunkten erzeugen. DIZIOĞLU veröffentlichte 1987 den ersten, punktweise mit Hilfe von Näherungsverfahren ermittelten Verlauf einer Übergangskurve eines viergliedrigen Gelenkgetriebes mit den oben erwähnten Sonderabmessungen [4].

1993 zeigten D. L. WANG und D. Z. XIAO, wie Punkte der Übergangskurve an umlauffähigen Kurbelschwingen als Grenzfall des Feldes mit Doppelpunkten zu ermitteln sind [9]. Hierbei wird ein Polarkoordinatensystem in das mitbewegte Kurbelgelenk gelegt. Für die anschließende Analyse von Koppelpunktbahnen wird für verschiedene Winkel der Abstand eines Koppelpunktes zum Koordinatennullpunkt variiert, bis die Grenze zwischen dem Feld mit und ohne Doppelpunkte - wo sie nicht identisch mit der Gangpolkurve ist - gefunden ist.

Obwohl Trochoiden von ihrer Gestalt her einfacher zu überschauen sind als Koppelpunktbahnen von Gelenkgetrieben, sind Untersuchungen über Selbstberührungspunkte von Trochoiden nicht bekannt. Selbst Mathematikbücher über Geometrie, die sich mit beiden Gebieten, nämlich Selbstberührungspunkten und Trochoiden beschäftigen [10], erwähnen nicht Selbstberührungspunkte von Trochoiden.

2 Die Übergangskurve

Der Hauptgrund, warum die Feldeinteilung der Koppellebene bisher nur für wenige Getriebe durchgeführt wurde, ist der, daß eine der benötigten Kurven, nämlich die Übergangskurve, nicht mit Hilfe eines einfach zu handhabenden Algorithmus zu ermitteln ist.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen Algorithmus zu entwickeln, der es erlaubt, die Übergangskurve für beliebige periodische ebene Bewegungen zu bestimmen.

2.1 Der Selbstberührungspunkt

Eine Koppelpunktbahn weist einen Selbstberührungspunkt auf, wenn ein Punkt der Bahn zweimal durchlaufen wird, ohne daß ein Selbstschnittpunkt vorliegt (Bild 2.1).

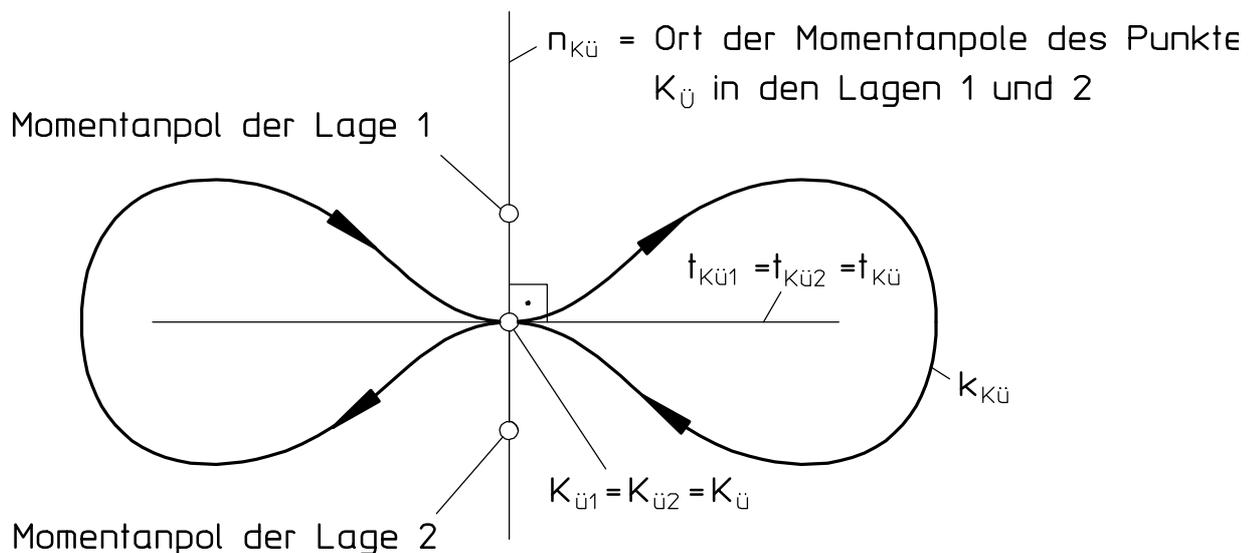


Bild 2.1: Geometrischer Ort der Momentanpole eines Selbstberührungspunktes $K_{\dot{U}}$ der Kurve $k_{K\dot{U}}$. Hierbei nähert sich ein Abschnitt der Bahn einem anderen, die Abschnitte berühren einander im Selbstberührungspunkt und trennen sich anschließend wieder.

2.1.1 Stand der Technik

Ist die Koppelpunktbahn hebbar stetig differenzierbar, was für alle durchschlagenden durchschlagfähigen¹⁾ Mechanismen und Getriebe (M&G) zutrifft, oder aber stetig differenzierbar, was für alle nicht durchschlagfähigen M&G zutrifft, so weist die Bahn für beide Lagen, in denen der Selbstberührungspunkt durchlaufen wird, die gleichen Tangenten auf, weshalb der Selbstberührungspunkt im englischen Schrifttum auch *self-tangent point* genannt wird [9]. Da die Tangenten identisch sind, sind auch die Normalen identisch, die wiederum die geometrischen Örter für die Momentanpole bilden. Somit liegen der Selbstberührungspunkt und die beiden zu ihm gehörenden Momentanpole auf einer Geraden [2].

Diese Aussage läßt sich auch umkehren: Liegen ein Doppelpunkt und seine zugehörigen Momentanpole auf einer Geraden - und fallen keine dieser drei Punkte zusammen - so handelt es sich bei dem Doppelpunkt um einen Selbstberührungspunkt.

2.2 Ermitteln von Doppelpunkten

Für das Ermitteln von Selbstberührungspunkten ist es also sinnvoll, über Doppelpunkte Bescheid zu wissen, um in einem weiteren Schritt zu prüfen, ob es sich bei einem Doppelpunkt um einen Selbstberührungspunkt handelt.

2.2.1 Stand der Technik

S. MILLER gibt in [8] ein Verfahren an, mit dessen Hilfe der Doppelpunkt für zwei gegebene Getriebestellungen von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken einfach zu ermitteln ist (Bild 2.2):

Der Doppelpunkt liegt im Schnittpunkt D der Winkelhalbierenden w_A des durch die beiden Lagen des Gliedes 1 aufgespannten Winkels $\sphericalangle A'A_0A$ mit der Winkelhalbierenden w_B des durch die beiden Lagen des Gliedes 3 aufgespannten Winkels $\sphericalangle B'B_0B$.

¹⁾ Viergliedrige Mechanismen und Getriebe, die eine Verzweigungslage oder eine Wechsellage aufweisen, werden durchschlagfähige Getriebe genannt - egal ob sie in der genannten Sonderlage (den Massekräften gehorchend) durchschlagen und somit den Bewegungs-Teilbereich wechseln oder nicht. Wird der Bewegungsbereich in diesen Sonderlagen nicht gewechselt, sind die dabei erzeugten Koppelpunktbahnen nicht hebbar stetig differenzierbar, weshalb diese Möglichkeit hier explizit ausgeschlossen werden muß.

2.2.2 Ermitteln des Doppelpunktes der Bahn eines Punktes einer Ebene für zwei beliebige Lagen der Ebene

Die in 2.2.1 gezeigte Ermittlung des Doppelpunktes einer Koppelpunktbahn von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken soll verallgemeinert werden. Es wird davon ausgegangen, dass zwei Lagen einer Ebene bekannt sind. Gesucht wird nun der Punkt D der Ebene, der beim Bewegen der Ebene aus der Lage 1 in die Lage 2 wieder in seine Ausgangslage zurückkehrt. Der Punkt D beschreibt also eine Bahn, die einen Doppelpunkt aufweist, der in den Lagen 1 und 2 der Ebene durchlaufen wird (Bild 2.3).

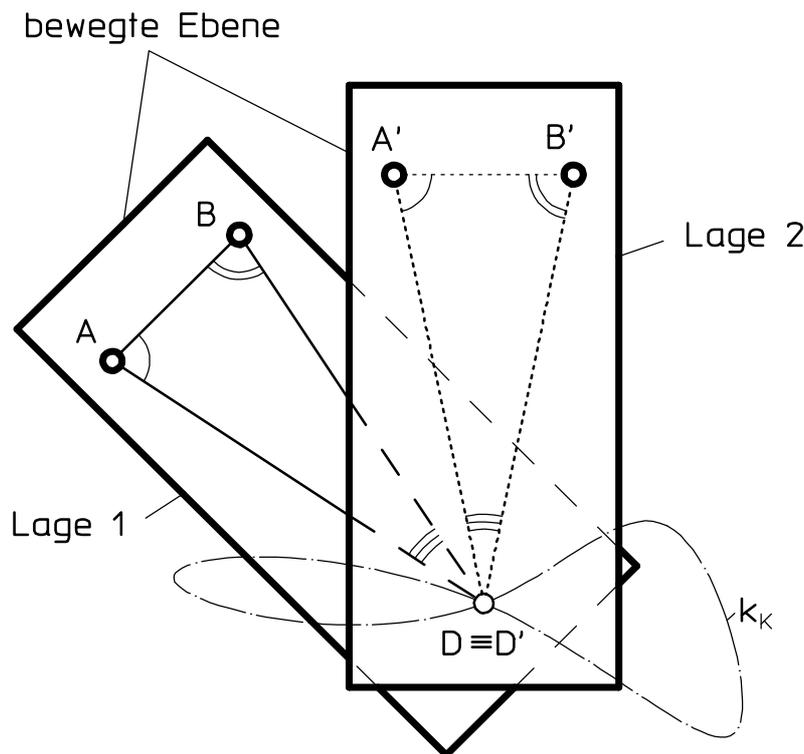


Bild 2.3: Zwei zu einem Doppelpunkt gehörende Lagen einer Ebene

Um bei der Suche nach einem Algorithmus auf Teile des in Kap. 2.2.1 geschilderten Verfahrens zurückgreifen zu können, werden zwei beliebige Punkte A und B der bewegten Ebene benötigt. Werden nun statt der beiden Winkelhalbierenden w_A und w_B in Bild 2.2 die beiden Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ (Bild 2.4) zu den Strecken $\overline{A'A}$ bzw. $\overline{B'B}$ eingezeichnet, so schneiden sie einander in dem gesuchten Doppelpunkt D .

Das ist der Fall, da der Punkt D der einzige Punkt ist, für den die aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle A'B'D$ (Bild 2.3) hergeleiteten Forderungen

$$\overline{AD} = \overline{A'D} \quad (2.1)$$

und

$$\overline{BD} = \overline{B'D} \quad (2.2)$$

erfüllt werden.

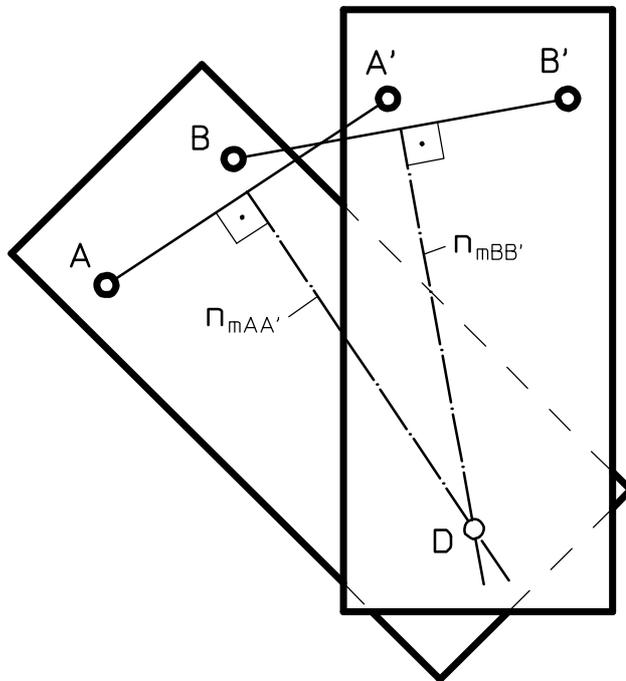


Bild 2.4: Konstruktion eines Doppelpunktes für zwei vorgegebene Lagen einer Ebene

Somit existiert genau ein Doppelpunkt für die beiden Lagen der Ebene, der gleichzeitig auch der Drehpol [11] in der gestellfesten Ebene für eine Drehung der bewegten Ebene aus der Lage 1 in die Lage 2 ist. Wie die tatsächliche Bewegung der Ebene aus der Lage 1 in die Lage 2 aussieht, spielt für das Ermitteln des Doppelpunktes also keine Rolle!

Beim Ermitteln der Doppelpunkte gibt es vier Grenzfälle:

- 1) Die Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ sind identisch (Bild 2.5). (Wenn beide Mittelsenkrechten parallel sind, müssen sie identisch sein, da der Abstand der Punkte A und B konstant ist.)
 - a) Die Bedingungen (2.1) und (2.2) werden nur dann von dem Punkt D erfüllt, wenn der Punkt D im Schnittpunkt der Geraden AB und A'B' liegt (vgl. auch [12]). Da die beiden Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ gleichzeitig die Symmetrieachse für die beiden Lagen der bewegten Ebene bilden, liegt der Punkt D auch auf beiden Mittelsenkrechten und stellt somit einen Doppelpunkt dar. Das Koppeldreieck $\triangle ABD$ entartet in diesem Fall zu einer Koppelgeraden.

- b) Bei einer translatorischen Bewegung der bewegten Ebene liegt D im Unendlichen. Da kein Punkt einer endlich großen Koppelenebene einen im Unendlichen liegenden Punkt durchlaufen kann, existiert keine Bahn mit einem Doppelpunkt: in diesem Fall sind die Abstände $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ gleich lang.
- c) Ist bei einer allgemeinen Bewegung der Ebene der Abstand $\overline{AA'}$ gleich lang wie der Abstand $\overline{BB'}$, so liegt der Doppelpunkt auf der Symmetrieachse im Unendlichen.

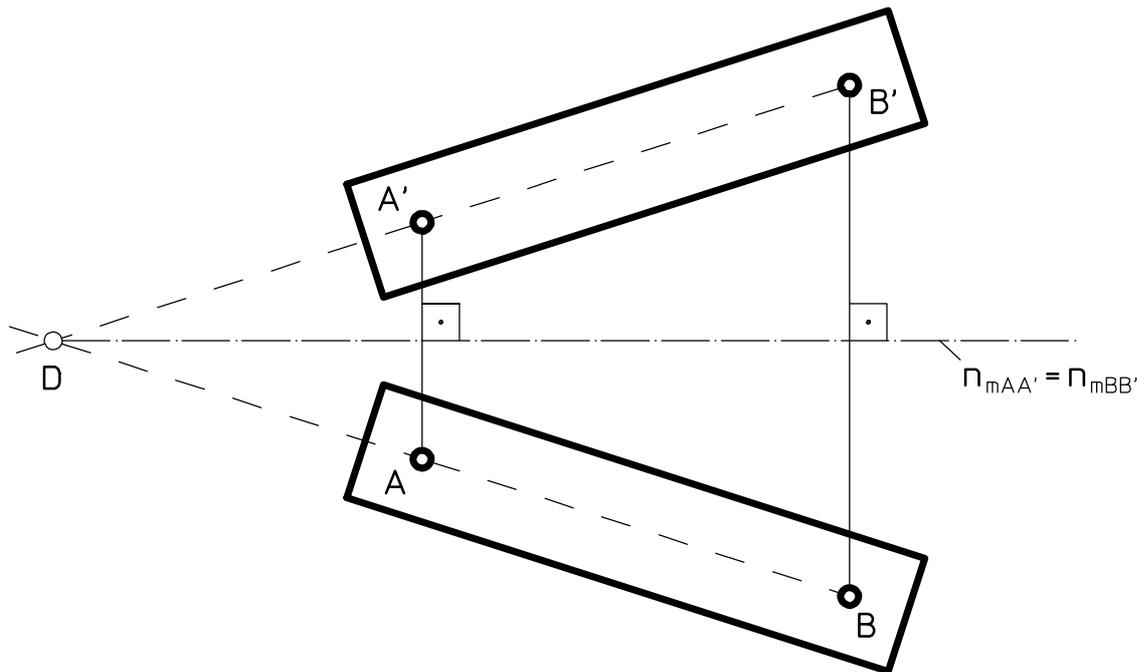


Bild 2.5: Die Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ der Verbindungsgeraden der Gelenkpunkte A bzw. B in zwei verschiedenen Ebenenlagen sind identisch

- 2) Befindet sich einer der gegebenen Punkte der bewegten Ebene (z. B. der Punkt B in Bild 2.6) in einem Doppelpunkt seiner Bahn, so handelt es sich um den gesuchten Doppelpunkt. Dieser Punkt (B) liegt auf jeden Fall auch auf der Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ der beiden Lagen des zweiten Punktes (A und A'), da der Abstand \overline{AB} in diesem Fall gleich dem Abstand $\overline{A'B}$ sein muß.
- 3) Durchlaufen beide gegebenen Punkte innerhalb einer Periode einen Selbstschnittpunkt ihrer Bahn, so handelt es sich um eine Verzweigungslage, in der sich jeder Punkt der bewegten Ebene in einem Doppelpunkt seiner Bahn befindet.

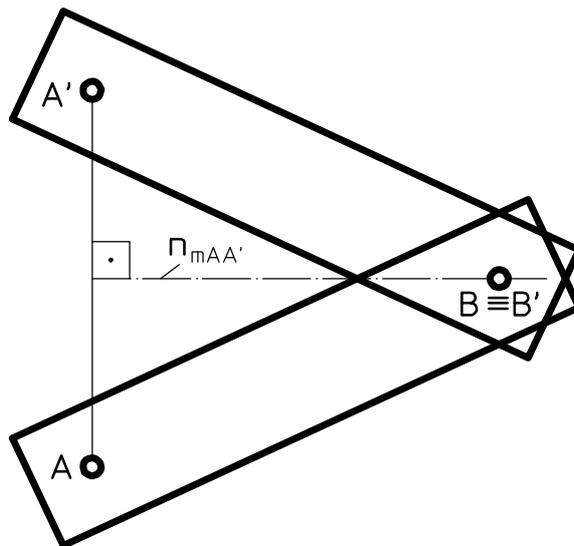


Bild 2.6: Der Gelenkpunkt B liegt über einem Doppelpunkt

- 4) Der Doppelpunkt von zwei endlich nah benachbarten Lagen der bewegten Ebene liegt bei einem Grenzübergang zu zwei unendlich nah benachbarten Lagen im Momentanpol. (Ist in Bild 2.2, S. 11, der Winkel φ mit dem Winkel φ_g identisch, so fallen die Winkelhalbierende w_A mit der Geraden A_0A und die Winkelhalbierende w_B mit der Geraden B_0B zusammen. Der Doppelpunkt D im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_A und w_B liegt also im Momentanpol, der sich bekannterweise im Schnittpunkt der Geraden A_0A und B_0B befindet.)

2.3 Die Doppelpunktkurve - Stand der Technik

Für jede Getriebestellung gibt es Punkte in einer allgemein bewegten Koppelenebene, die momentan einen Doppelpunkt ihrer Bahn durchlaufen. Zum Ermitteln dieser Punkte wird die Lage 1 der Koppelenebene (vgl. Bild 2.3, S. 12) festgehalten, während die Koppelenebene alle möglichen Lagen als Lage 2 einnimmt. Für jede Kombination der Lage 1 mit einer der möglichen Lagen 2 der Koppelenebene wird nun der zugehörige Doppelpunkt in der Koppelenebene ermittelt. Auf diese Weise entsteht eine Punktefolge (Bild 2.7), die Doppelpunktkurve genannt wird [13] (vgl. auch Tabelle 8.1, S. 263).

Existiert ein Selbstberührungspunkt in der Lage 1, so liegt er auf der Doppelpunktkurve, da jeder Selbstberührungspunkt gleichzeitig ein Doppelpunkt ist.

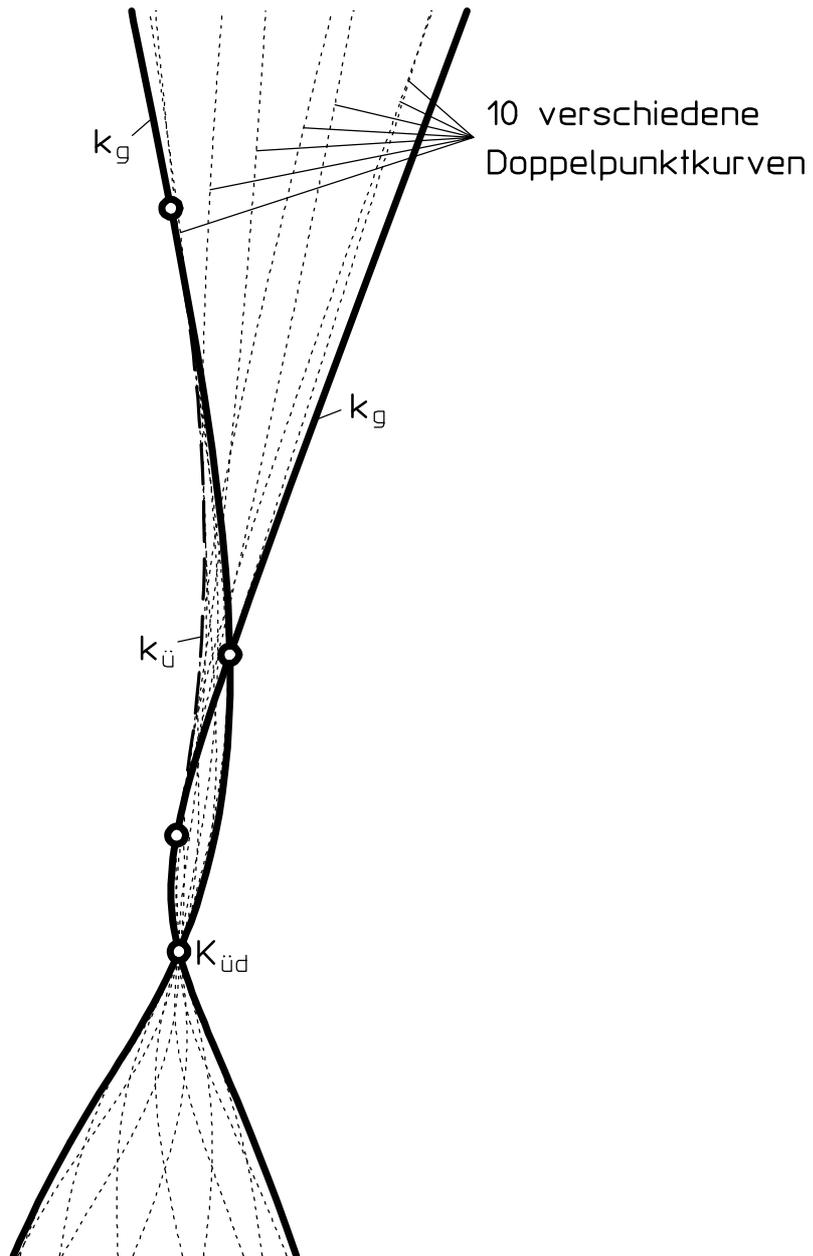


Bild 2.7: Doppelpunktcurven einer Kurbelschwinge mit deren Einhüllenden: der Gangpolkurve k_g und der Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$

Die Doppelpunktkurve ist bei viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit der von R. MÜLLER *zweite Fokalkurve*²⁾ genannten Kurve [2] und mit jeweils einer Kurve μ_{φ_i} der Kurvenschar μ_{φ} von S. MILLER [8] identisch.

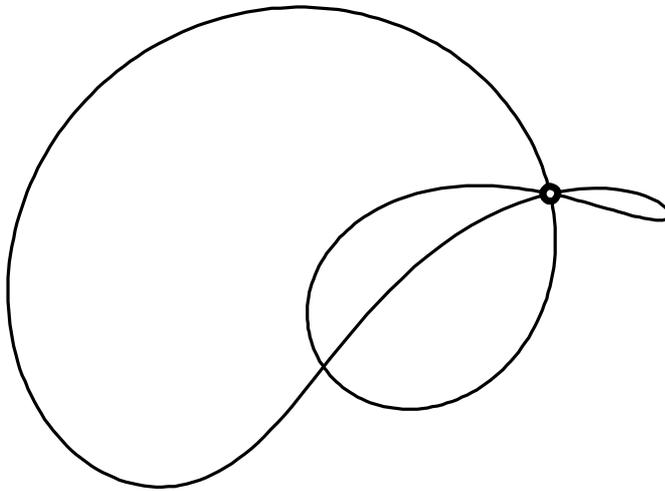


Bild 2.8: Koppelpunktbahn mit Dreifach-Selbstschnittpunkt

2.4 Die Dreifachpunktkurve - Stand der Technik

Ein in einer allgemein bewegten Ebene liegender Selbstschnittpunkt der Doppelpunktkurve erzeugt eine Bahn mit einem Dreifachpunkt, d. h. die Bahn kreuzt ein weiteres Mal ihren eigenen Doppelpunkt³⁾. Handelt es sich bei diesem um einen Selbstschnittpunkt, so entsteht ein Dreifach-Selbstschnittpunkt (Bild 2.8). Es sind aber auch Selbstschnittpunkte mit einer Spitze oder in einem Selbstberührungspunkt möglich. Die Folge aller Dreifachpunkte bildet die Dreifachpunktkurve k_t (Bild 2.9), die nach [4] bei viergliedrigen Gelenkgetrieben

²⁾ Der Name Fokalkurve wurde von R. MÜLLER gewählt, da diese Kurve den Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche die Seiten des Gelenkvierecks A_0ABB_0 berühren, darstellt [2]. Mit Hilfe dieser Eigenschaft wies er nach, dass die Doppelpunktkurve und die Gangpolkurve die gleiche Tangente im Momentanpol besitzen [2]! Da die Eigenschaft der Doppelpunktkurve, gleichzeitig Brennpunkt von Kegelschnitten zu sein, aber nur für viergliedrige ebene Gelenkgetriebe gilt, wird dieser Name hier nicht übernommen.

³⁾ Wird die Doppelpunktkurve für eine vorgegebene Getriebebestellung (z. B. die Getriebebestellung $\varphi = 442^\circ = \varphi_g$ in Bild 2.9) ermittelt, so gehört jeder Punkt der Doppelpunktkurve zu einer zweiten Getriebebestellung - nämlich der Getriebebestellung φ_i (vergl. auch Bild 2.2, S. 11). Ein Doppelpunkt der Doppelpunktkurve ist also neben der Getriebebestellung φ_g zwei weiteren Getriebebestellungen - den Getriebebestellungen $\varphi_i = \varphi_1$ und $\varphi_i = \varphi_2$ - und somit drei Getriebebestellungen zuzuordnen (Bei viergliedrigen durchschlagfähigen Gelenkgetrieben mit $\varphi_{\max} = 720^\circ$ sind das immer $\varphi_1 = 0^\circ$ und $\varphi_2 = 360^\circ$). Ein Doppelpunkt der Doppelpunktkurve gehört also zu einem Dreifachpunkt seiner Koppelpunktbahn.

immer zu einem Kreis entartet. Sie tritt nicht bei umlauffähigen und nicht bei totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben auf.

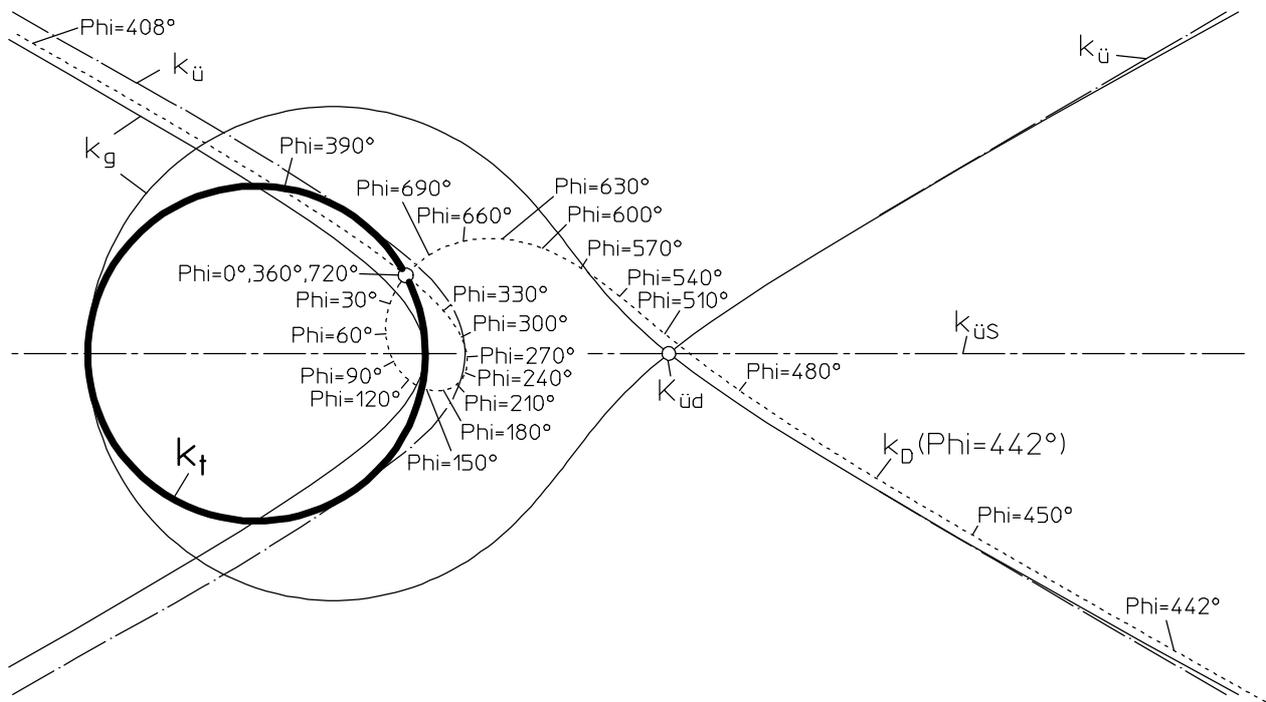


Bild 2.9: Dreifachpunktcurve k_t , Gangpolcurve k_g , Übergangskurve $k_ü$, Scheinübergangskurve $k_üS$ und Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_üD$ einer durchschlagfähigen Kurbelaußenschwinge sowie deren Doppelpunktcurve k_D in der Lage (Antriebswinkel=) $\Phi = 442^\circ$.

2.5 Die Übergangskurve und die Selbstberührungskurve

2.5.1 Die Übergangskurve - Stand der Technik

Die Übergangskurve ist nach R. MÜLLER die Folge aller Punkte der Koppelenebene, die (innerhalb einer Periode) einen Selbstberührungspunkt durchlaufen.

Nach [7] ist sie für viergliedrige ebene Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken eine Kurve 10. Ordnung. Pro Getriebestellung weist sie theoretisch vier Selbstberührungspunkte auf. Unter theoretisch ist zu verstehen, daß es z. B. bei der Betrachtung der Koppel in nur einem Bewegungsbereich eines umlauffähigen Gelenkgetriebes weniger als vier Selbstberührungspunkte gibt.

Die Schwingen- und Schiebergelenke einer Koppellebene stellen zwar in jeder Lage einen Selbstberührungspunkt dar. Ihre Folge bildet jedoch in der Koppellebene keine Kurve sondern einen Punkt, weshalb es sich bei diesen Gelenken um einen isolierten Punkt handelt, den R. Müller als nicht zur Übergangskurve gehörend einordnet [2]. In Analogie zu Momentan- und Dauerpol sollen derartige isolierte reelle Punkte hier Dauer-Übergangskurvenpunkte genannt und in den weiteren Überlegungen mit berücksichtigt werden.

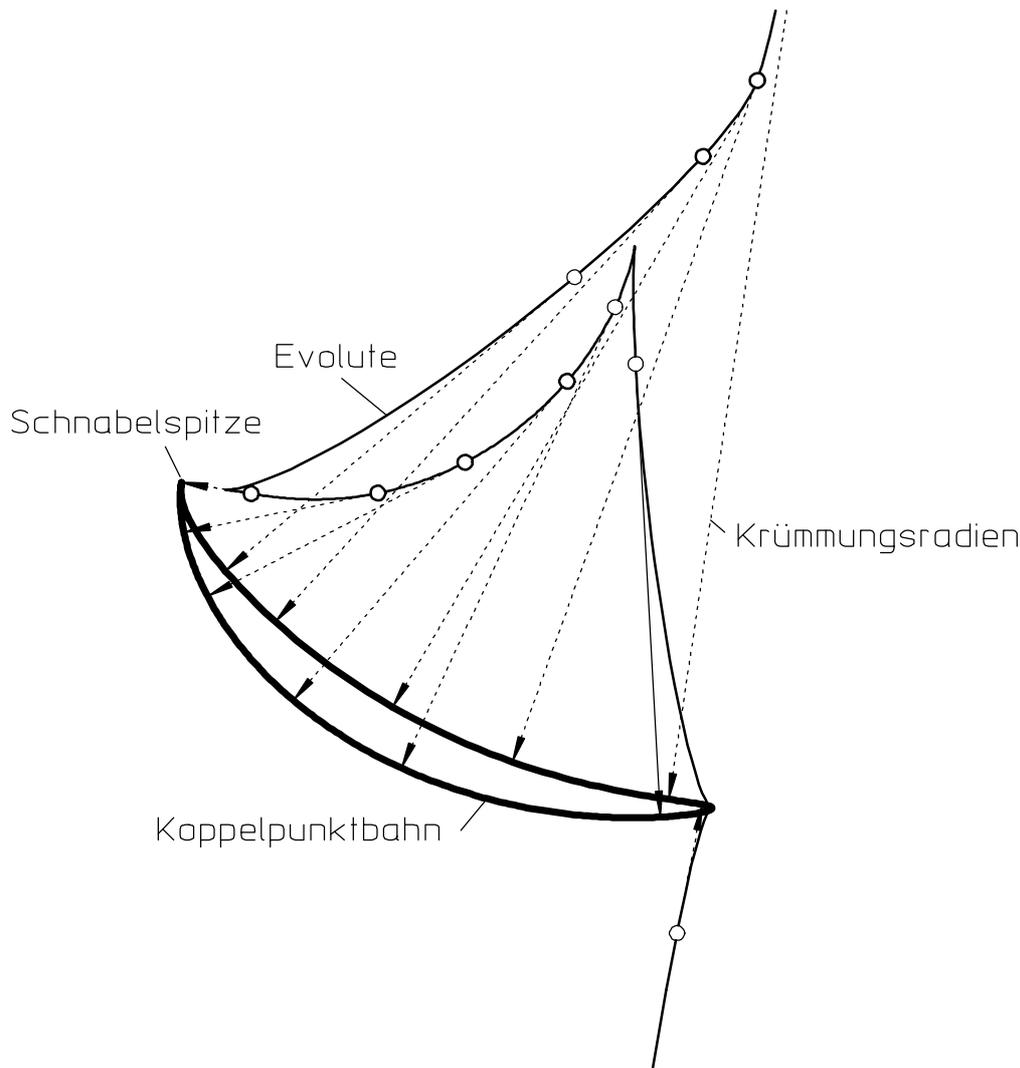


Bild 2.10: Koppelpunktbahn mit Schnabelspitze

Wird bei der Variation des Winkels φ in Bild 2.2, S. 11, im Grenzfall $\varphi = \varphi_g$, so liegen die Winkelhalbierende w_A und die Gerade A_0A übereinander. Das gleiche gilt für die Winkelhalbierende w_B und die Gerade B_0B . Der Doppelpunkt D liegt somit im Schnittpunkt der Geraden A_0A und B_0B . Er nimmt also den gleichen geometrischen Ort wie der Momentanpol ein. Die Bedingung für einen Selbstberührungspunkt, daß die Momentanpole für die beiden Lagen eines Doppelpunktes und der Doppelpunkt selbst auf einer Geraden liegen, ist daher in der Form eines Grenzfalles erfüllt. Der Momentanpol und somit alle Punkte der Gangpolkurve sind also singuläre Punkte der Übergangskurve. Im Gegensatz zum Dauer-Übergangskurvenpunkt erzeugen Punkte der Gangpolkurve aber nur in Son-

derfällen Bahnen mit Selbstberührungspunkten in der Form einer Schnabelspitze (vgl. Abschnitt 3.4 und Bild 2.10). Im allgemeinen durchlaufen sie eine Spitze und keinen Selbstberührungspunkt. Die Gangpolkurve wird aus diesem Grund genauso wie in [2] nicht als Teil der Übergangskurve betrachtet.

Selbstberührungspunkte und Momentanpole stellen einen Grenzfall eines Doppelpunktes dar und liegen daher immer auf der Doppelpunktcurve. Die Übergangskurve hüllt gemeinsam mit der Gangpolkurve alle Doppelpunktcurven ein, da die Doppelpunktcurve

- im Selbstberührungspunkt mit der Übergangskurve und
- im Momentanpol mit der Gangpolkurve

die gleiche Tangente aufweist⁴⁾ [2].

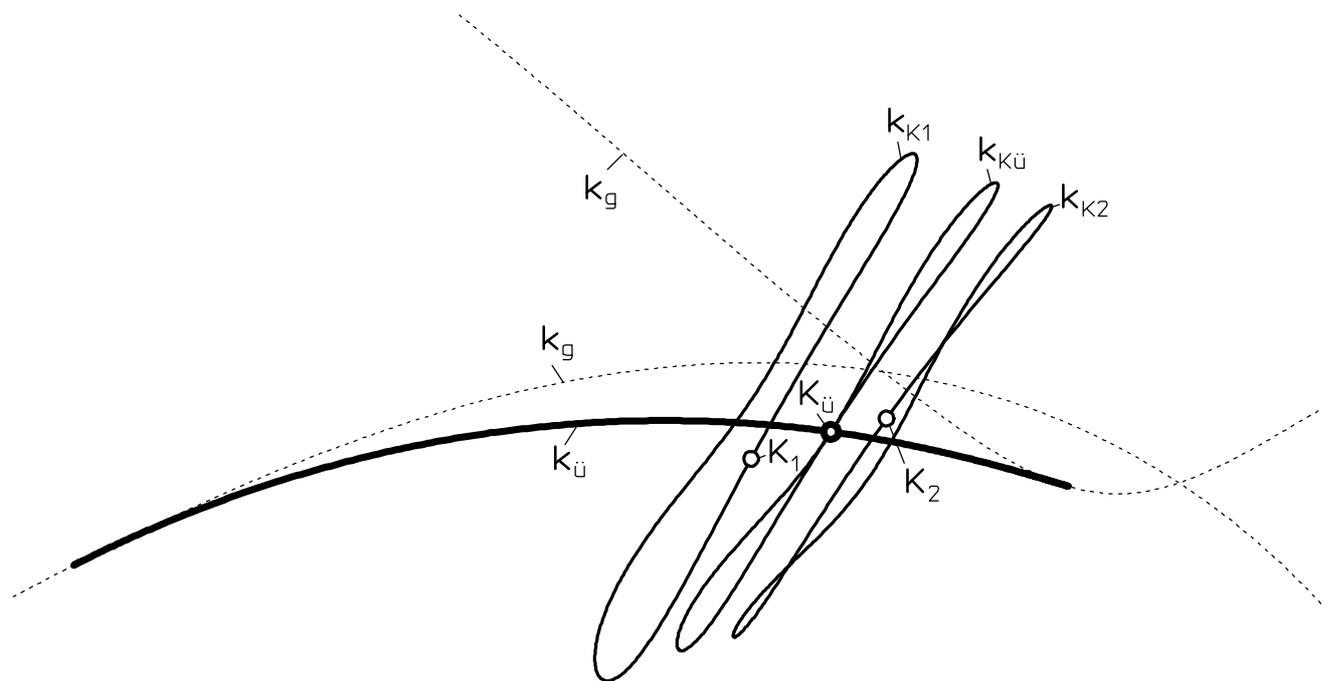


Bild 2.11: Koppelpunktbahnen mit ($k_{Kü}$) und ohne Selbstberührungspunkt ($k_{K1}; k_{K2}$)

Punkte der Übergangskurve erzeugen definitionsgemäß Bahnen mit Selbstberührungspunkten (Bild 2.11). Auf der einen Seite (hier: oberhalb) der Übergangskurve wandeln sich die unendlich nah benachbarten Doppelpunkte des Selbstberührungspunktes in zwei endlich nah benachbarte Selbstschnittpunkte, das heißt: statt des Berührungspunktes weist die Bahn zwei Selbstschnittpunkte auf. Auf der anderen Seite (hier: unterhalb) der

⁴⁾ Unter Umhüllen ist nicht zu verstehen, daß Doppelpunktcurven ihre Umhüllende nie schneiden. Auch wenn zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkt die gleiche Tangente aufweisen und einander in diesem Punkt berühren, so können sich derartige Kurven in ihrem weiteren Verlauf schneiden - wie z. B. bei umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben.

Übergangskurve trennen sich die unendlich nah benachbarten Doppelpunkte, so daß der Selbstschnittpunkt verschwindet.

Somit erzeugen Punkte auf der einen Seite der Übergangskurve Bahnen, die zwei Selbstschnittpunkte mehr aufweisen als die Bahnen von Punkten, die auf der anderen Seite der Übergangskurve liegen [2].

2.5.2 Die Selbstberührungskurve

Da Koppelpunktbahnen Bahnen von Punkten der Koppellebene sind, die diese in der Gestellebene durchlaufen, werden die Selbstberührungspunkte in der Gestellebene ermittelt und anschließend in die Koppellebene transformiert, wo sie die Übergangskurve bilden. Gleichzeitig entsteht aber auch eine Punktefolge der Selbstberührungspunkte in der Gestellebene. Diese Punktefolge wird im folgenden Selbstberührungskurve genannt. Ein Übergangskurvenpunkt durchläuft genau in der Getriebelage seinen Selbstberührungspunkt, in der er über⁵⁾ der Selbstberührungskurve zu liegen kommt.

Die Übergangskurve ist die punktweise aus der Gestellebene in die Koppellebene transformierte Selbstberührungskurve und umgekehrt (vgl. auch Tabelle 8.1 S. 263).

2.5.3 Sonderfälle der Übergangskurve

Ein Übergangskurvenpunkt erfüllt in der Regel die allgemeinen Bedingungen eines Selbstberührungspunktes nach Bild 2.12:

- Er liegt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ bezüglich der Strecken $\overline{A'A}$ und $\overline{B'B}$, die durch die Endpunkte (A und A' bzw. B und B') der Koppelgeraden AB in zwei verschiedenen Lagen gebildet werden.
- Des weiteren liegt er auf der Geraden $P'P$ durch die Momentanpole P und P' , die sich im Schnittpunkt der Normalen n_{kA} und n_{kB} bzw. $n_{kA'}$ und $n_{kB'}$ an die Bahnen k_A und k_B der Punkte A (bzw. A') und B (bzw. B') in den beiden vorgegebenen Lagen befinden.

⁵⁾ Analog zu einem Punkt der Gangpolkurve - in der Koppellebene - , der *über* einem Punkt der Rastpolkurve - in der gestellfesten Ebene und damit in einer anderen Ebene - liegt (vgl. Fußnote ¹⁾ auf Seite 42 und Bild 3.1a, S. 42), befindet sich ein Punkt der Übergangskurve - in der Koppellebene - *über* einem Punkt der Selbstberührungskurve - in der gestellfesten Ebene - .

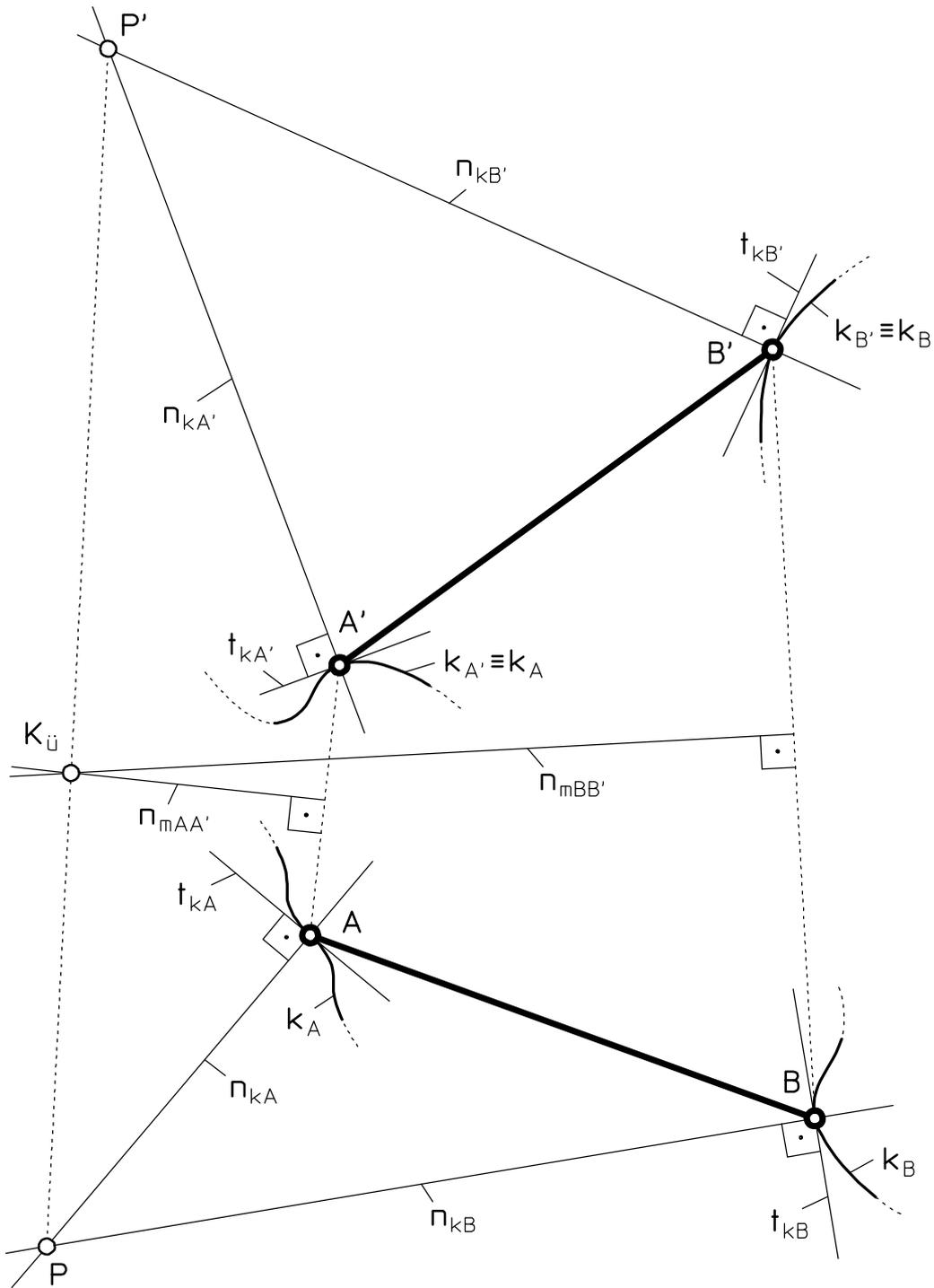


Bild 2.12: Bedingungen für einen Punkt auf der Übergangskurve

2.5.3.1 Die Schein-Übergangskurve und die Verzweigungslage

Fallen die Punkte A und A' sowie die Punkte B und B' aus Bild 2.12 innerhalb einer Periode (nicht am Anfang und am Ende einer Periode) zusammen, so stellt gemäß Bild 2.13 die Koppelgerade $AB = A'B'$ gleichzeitig die Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ und $n_{mBB'}$ dar. Liegen in dieser Lage die Momentanpole P_{x0} und P_{x0}' ebenfalls auf der Koppelgeraden AB , so erfüllt jeder Punkt der Koppelgeraden die Bedingung für einen Übergangskurvenpunkt.

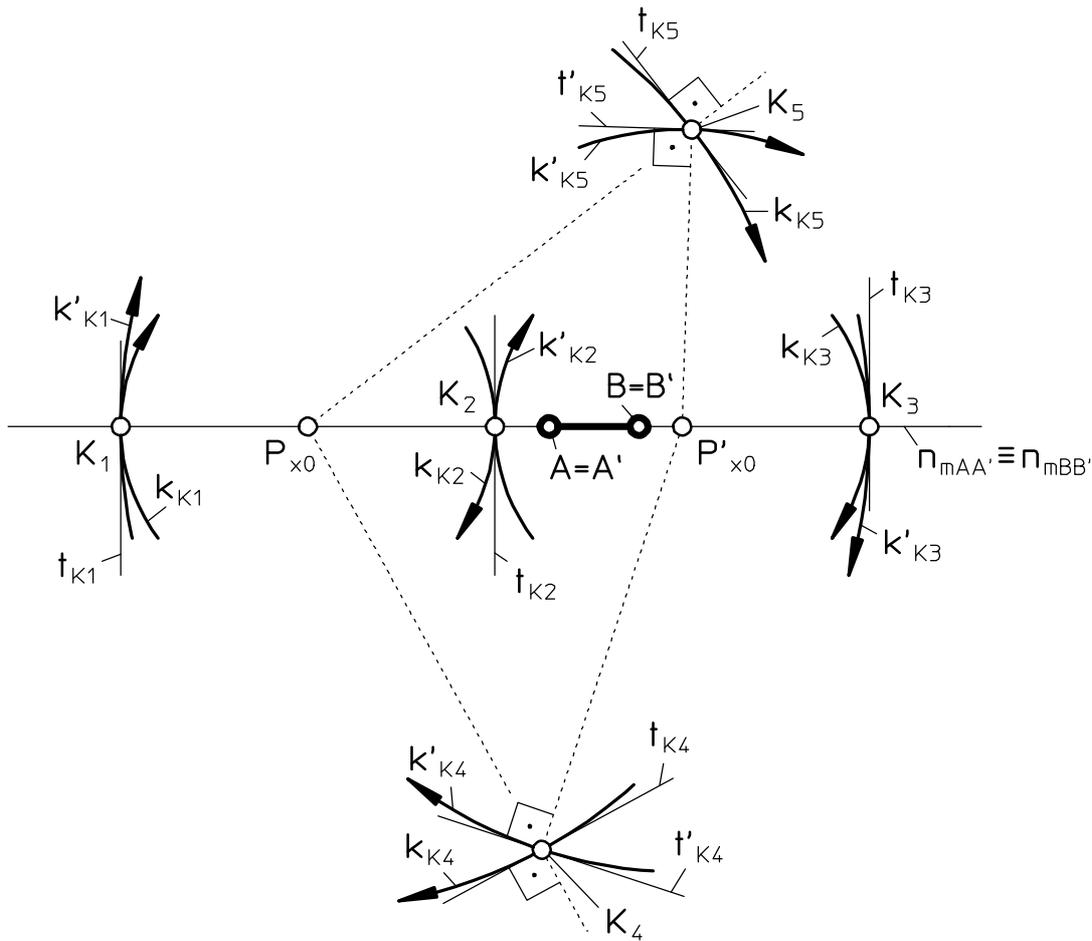
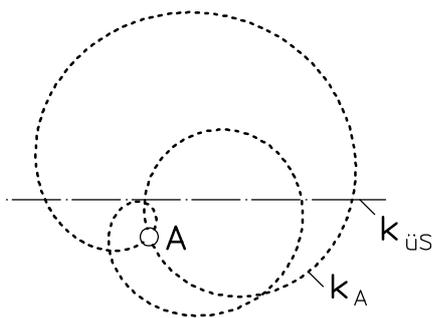


Bild 2.13: Koppelpunktbahnen von Punkten auf und abseits der Koppelgeraden AB in der Verzweigungslage

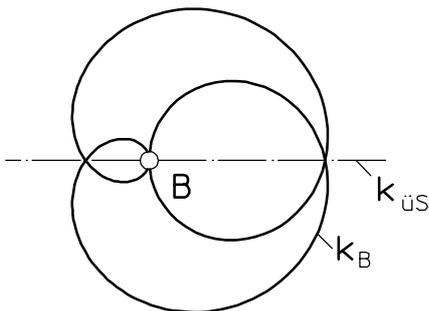
Allgemein gesagt bedeutet das: Durchläuft eine Ebene innerhalb einer Periode die gleiche Lage ein zweites Mal und existieren für beide Durchläufe verschiedene Momentanpole P_{x0} und P_{x0}' , so befinden sich alle Punkte der Polverbindungsgeraden $P_{x0}P_{x0}'$ in einem Selbstberührungspunkt ihrer Bahn.

Aufgrund der Tatsache, daß die Ebene die gleiche Lage ein weiteres Mal durchläuft, befinden sich allerdings auch alle anderen Punkte der Ebene in einem Doppelpunkt ihrer Bahn, der im allgemeinen - also links und rechts von der Polverbindungsgeraden - ein Selbstschnittpunkt ist.

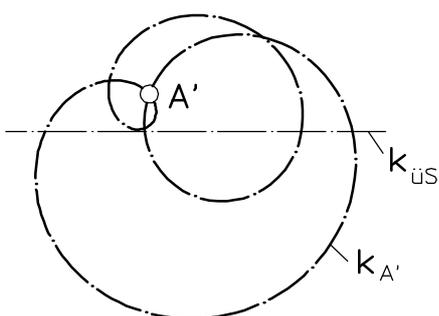
Bei durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben tritt die geschilderte Konstellation in den Verzweigungslagen auf [14]. Wenn die allgemeine Bewegung der Ebene nur durch Führen von zwei Punkten auf deren Punktbahnen erzeugt wird, so stellt die beschriebene Konstellation ebenfalls eine Verzweigungslage dar, da sich jeder Punkt der Ebene in einem Doppelpunkt seiner Bahn befindet und daher der Momentanpol theoretisch für die Fortsetzung der Bewegung von der Lage P_{x_0} in die Lage $P_{x_0'}$ oder umgekehrt springen kann („was wegen konstruktiver Gegebenheiten ggf. unmöglich ist - vgl. Koppellebene AB in Bild 1.1, S. 3, in der Getriebestellung A_0ABCC_0 und deren zugehörigen Momentanpol P_{20} mit der Getriebestellung $A_0ABC'C_0$ und deren Momentanpol $P_{20'}$).



Ein Punkt A neben der Schein-Übergangskurve $k_{\text{üS}}$ erzeugt im allgemeinen eine unsymmetrische Bahn k_A .



Ein Punkt B auf der Schein-Übergangskurve erzeugt eine symmetrische Bahn k_B mit einem Selbstberührungspunkt im Punkt B.



Der an der Schein-Übergangskurve gespiegelte Punkt A (A') erzeugt eine Bahn $k_{A'}$, die spiegelbildlich bezüglich der Schein-Übergangskurve zur ursprünglichen Bahn k_A liegt.

Bild 2.14: Bahnen von Punkten auf und neben der Schein-Übergangskurve $k_{\text{üS}}$

Unabhängig von der Erzeugung der (periodischen, stetig oder hebbbar unstetig differenzierbaren ebenen) Bewegung einer Ebene soll eine zweimal durchlaufene Lage der Ebene, für die zwei verschiedene Momentanpole existieren, daher Verzweigungslage genannt

werden. Da alle Punkte der Ebene in der Verzweigungslage einen Doppelpunkt durchlaufen, stellen die Punkte der Verbindungsgeraden der beiden Momentanpole zwar einen Grenzfall dar, da ihre Doppelpunkte keine Selbstschnittpunkte sondern Selbstberührungspunkte sind (Bild 2.14). Die Anzahl der Doppelpunkte der Bahnen eines jeden Punktes der Ebene erhöht sich jedoch beim Auftreten einer Verzweigungslage für jeden Punkt der Ebene gleichmäßig um eins gegenüber einer Bewegung ohne Verzweigungslage. Die Polverbindungsgerade teilt also nicht die bewegte Ebene in zwei Felder mit unterschiedlicher Anzahl an Selbstschnittpunkten ein! Da sie somit nicht alle Eigenschaften einer Übergangskurve aufweist, soll sie Schein-Übergangskurve ($k_{\text{üs}}$) genannt werden.

Eine Schein-Übergangskurve ist also immer eine Gerade (Bild 1.1, S. 3), und ihre zugehörige Selbstberührungskurve ist ebenfalls eine Gerade, da alle Punkte der Schein-Übergangskurve ihren Selbstberührungspunkt in der gleichen Lage der Ebene durchlaufen. Numerische und analytische Algorithmen zum Berechnen von Übergangskurvenpunkten können keine Punkte der Schein-Übergangskurve ermitteln, da die Bewegung der Ebene in der Verzweigungslage hebbbar unstetig ist.

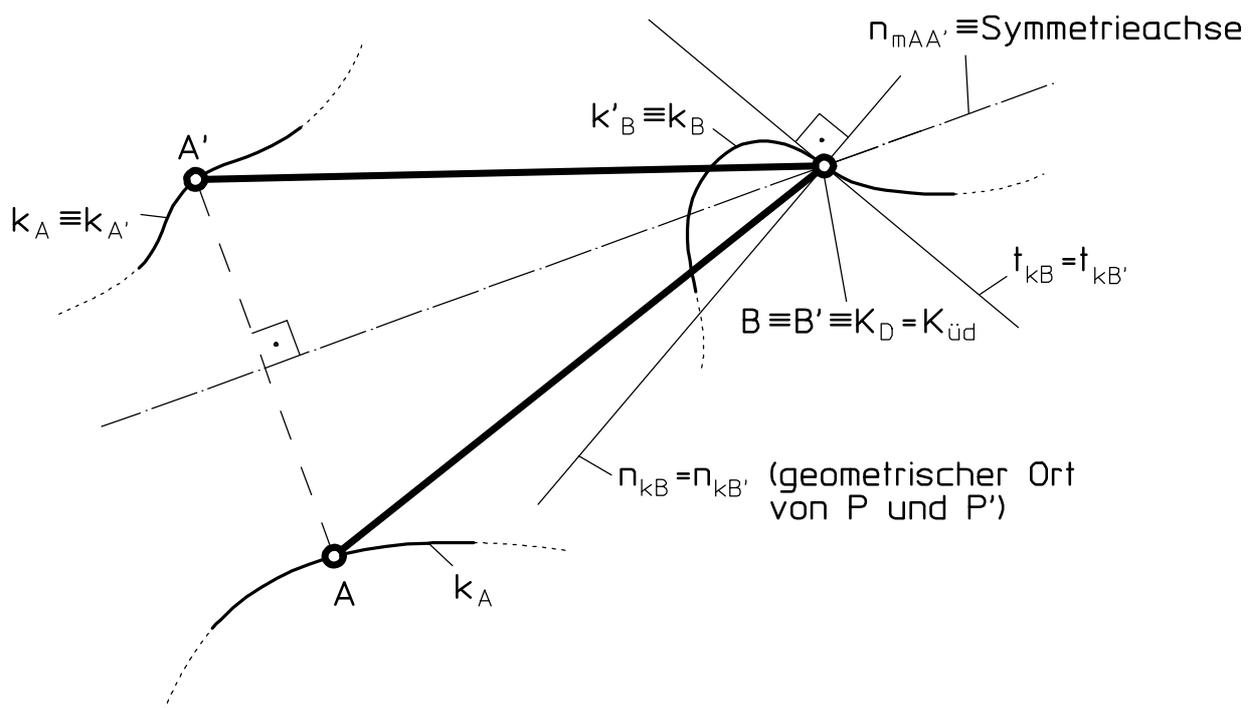


Bild 2.15: Bedingungen für einen Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{\text{üD}}$

2.5.3.2 Der Dauer-Übergangskurvenpunkt

Bild 2.15 zeigt einen weiteren die allgemeinen Bedingungen für Selbstberührungspunkte erfüllenden Grenzfall: Die Bahn eines Punktes der bewegten Ebene - im Bild 2.15 die des

Punktes B - wird (teilweise) zweimal durchlaufen (in der Regel in verschiedenen Durchlaufrichtungen), während alle anderen Punkte - in Bild 2.15 z. B. der Punkt A bzw. A' - unterschiedliche Äste ihrer Bahn erzeugen.

In diesem Fall ist der Punkt $B \equiv B'$ also gleichzeitig ein Doppelpunkt. (Er liegt auf der Mittelsenkrechten $n_{mAA'}$ der Verbindungslinie der Punkte A und A' sowie auf der Mittelsenkrechten $n_{mBB'}$, die in diesem Grenzfall, in dem B identisch mit B' ist, auf jeden Fall durch B und auch durch B' verläuft.) Da die Tangenten t_{kB} und $t_{kB'}$ der Bahn k_B an die Punkte B und B' ebenfalls identisch sind und die Momentantpole bekannterweise auf der Normalen liegen, befinden sich die Momentantpole für die Koppellagen AB und AB' sowie der Doppelpunkt in $B \equiv B'$ auf einer Geraden, nämlich der Normalen n_{kB} , und der Doppelpunkt in B ist somit ein Selbstberührungspunkt.

Für den Bereich der Bahn eines Punktes B , der zweimal durchlaufen wird (in der Regel die vollständige Bahn), entartet die durch Transformation der Selbstberührungskurve in die Koppellebene erzeugte Übergangskurve zu einem Punkt, der mit dem Punkt B identisch ist. Die zu transformierende Kurve ist somit eine Dauer-Selbstberührungskurve, und die Übergangskurve entartet zu einem Dauer-Übergangskurvenpunkt.

2.6 Die Drehpolkurve

2.6.1 Die Drehpolkurve - Stand der Technik

Wird in Bild 2.3, S. 12, die Lage 1 der Koppellebene beibehalten, während die Lage 2 so variiert wird, daß sie jede mögliche Lage der Koppellebene einnimmt, und wird für jede so entstandene Kombination von zwei Lagen der Doppelpunkt ermittelt und in die gestellfeste Ebene übertragen, so entsteht eine Punktefolge, die von P. LOHSE Polortkurve [11] und von G. LOHSE Drehpolkurve [15] genannt wurde. Die Drehpolkurve ist somit eine durch Translation und Rotation in die gestellfeste Ebene transformierte Doppelpunktkurve.

2.6.2 Bemerkungen zur Drehpolkurve

Für die Synthese einer Kurbelschwinge bzw. -schleife zum Erzeugen einer Koppelpunktbahn, die näherungsweise eine vorgegebene Punktefolge durchläuft, entwickelte P. LOHSE einen Algorithmus, der unter dem Namen Polortverfahren oder auch LOHSE-Verfahren bekannt wurde [11]. Bei diesem Verfahren werden das gestellfeste Drehgelenk A_0 einer Kurbel (Bild 2.16) und die kreisförmige Bahn k_A des rotierenden Kurbelgelenks A sowie

die zu verwirklichende Punktefolge vorgegeben. Sind die Durchlaufrichtung der Bahn k_A und der Durchlaufsinn der Punktefolge gegeben, läßt sich durch den in [11] vorgeschlagenen Algorithmus für jeden Punkt der Punktefolge eine Lage der Koppel ermitteln.

zu verwirklichende Punktefolge

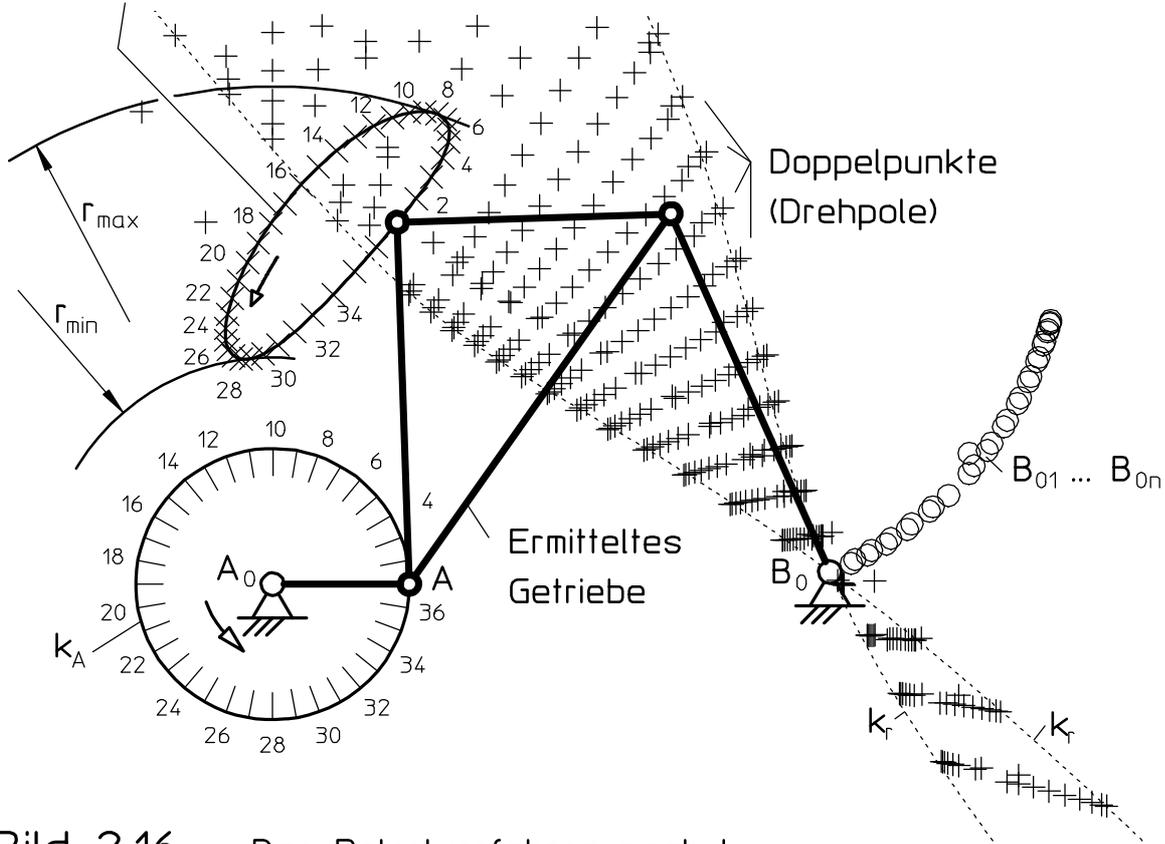


Bild 2.16: Das Polortverfahren nach LOHSE

Können diese Koppellagen z. B. von einer Kurbelschwinge verwirklicht werden, so existiert ein weiteres gestellfestes Drehgelenk B_0 für die Schwinge. Das Schwingengelenk B_0 liegt bekannterweise in einem der beiden Schnittpunkte der Rastpolkurve der Kurbelschwinge. Aufgrund zahlreicher Untersuchungen (z. B. [11, 15, 16, 17]) zweifelt heute niemand mehr an der Tatsache, daß auch alle Drehpolkurven durch das Schwingengelenk B_0 verlaufen⁶⁾ und daß sich die Drehpolkurven daher in B_0 einschnüren - und zwar ausschließlich in B_0 . Aufgrund dieses Verhaltens der Drehpolkurven kann die geforderte Punktefolge also von einem Koppelgelenk der Kurbelschwinge durchfahren werden, wenn sich die nach [11] zu konstruierenden Drehpolkurven (vgl. auch die Ermittlung von Doppelpunkten in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2) in einem Punkt einschnüren und das gestellfeste Schwingengelenk in diesen Punkt gelegt wird.

⁶⁾ R. MÜLLER beschrieb schon in [2], daß die von ihm 2. Fokalkurve genannte Doppelpunktkurve und somit auch die in die gestellfeste Ebene transformierte Drehpolkurve durch alle Schwingengelenke von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken verläuft.

Bei der Synthese schneiden sich in der Regel nicht alle Drehpolkurven exakt in einem Punkt, sondern es entsteht eine „Wolke“ von Schnittpunkten. Je schmaler die Einschnürung dieser „Wolke“ ist, desto genauer wird die vorgegebene Punktefolge erzeugt.

VELDKAMP bewies in [18] anhand einer Parameterdarstellung der Drehpolkurve, daß Drehpolkurve und Rastpolkurve einen Punkt, nämlich den Momentanpol der Lage, für die die Drehpolkurve ermittelt wurde, gemeinsam haben und daß in diesem Punkt die Tangente an beide Kurven identisch ist. Damit konnte er zeigen, daß die Rastpolkurve die Einhüllende (Envelope) der Drehpolkurvenschar ist (vgl. Fußnote ⁴⁾ auf Seite 20). Die Eigenschaft, warum sich die Drehpolkurvenschar bei einer Kurbelschwinge in genau einem Punkt - nämlich dem gestellfesten Drehgelenk der Schwinge - einschnürt, ist dadurch aber noch nicht nachgewiesen, da die Rastpolkurve zwei Selbstschnittpunkte aufweist.

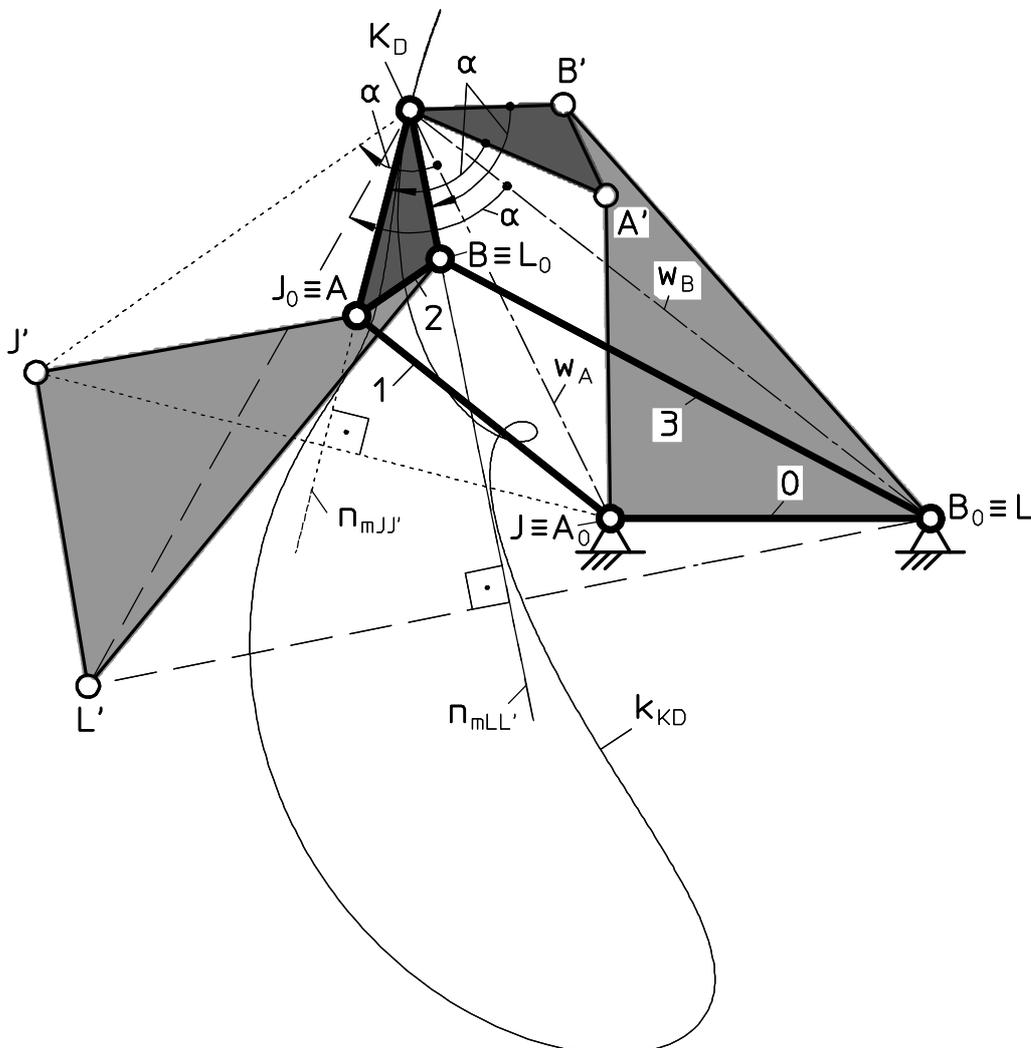


Bild 2.17: Der Doppelpunkt K_D eines Getriebes A_0ABB_0 (bzw. $A_0A'B'B_0$) ist gleichzeitig derjenige von dessen kinematischer Umkehrung J_0JLL_0 (bzw. $J_0J'L'L_0$)

An dieser Stelle ist es sehr hilfreich, daß die Drehpolkurve die in die gestellfeste Ebene transformierte Doppelpunktcurve ist. Die Grenzen von Feldern, in denen Doppelpunkte

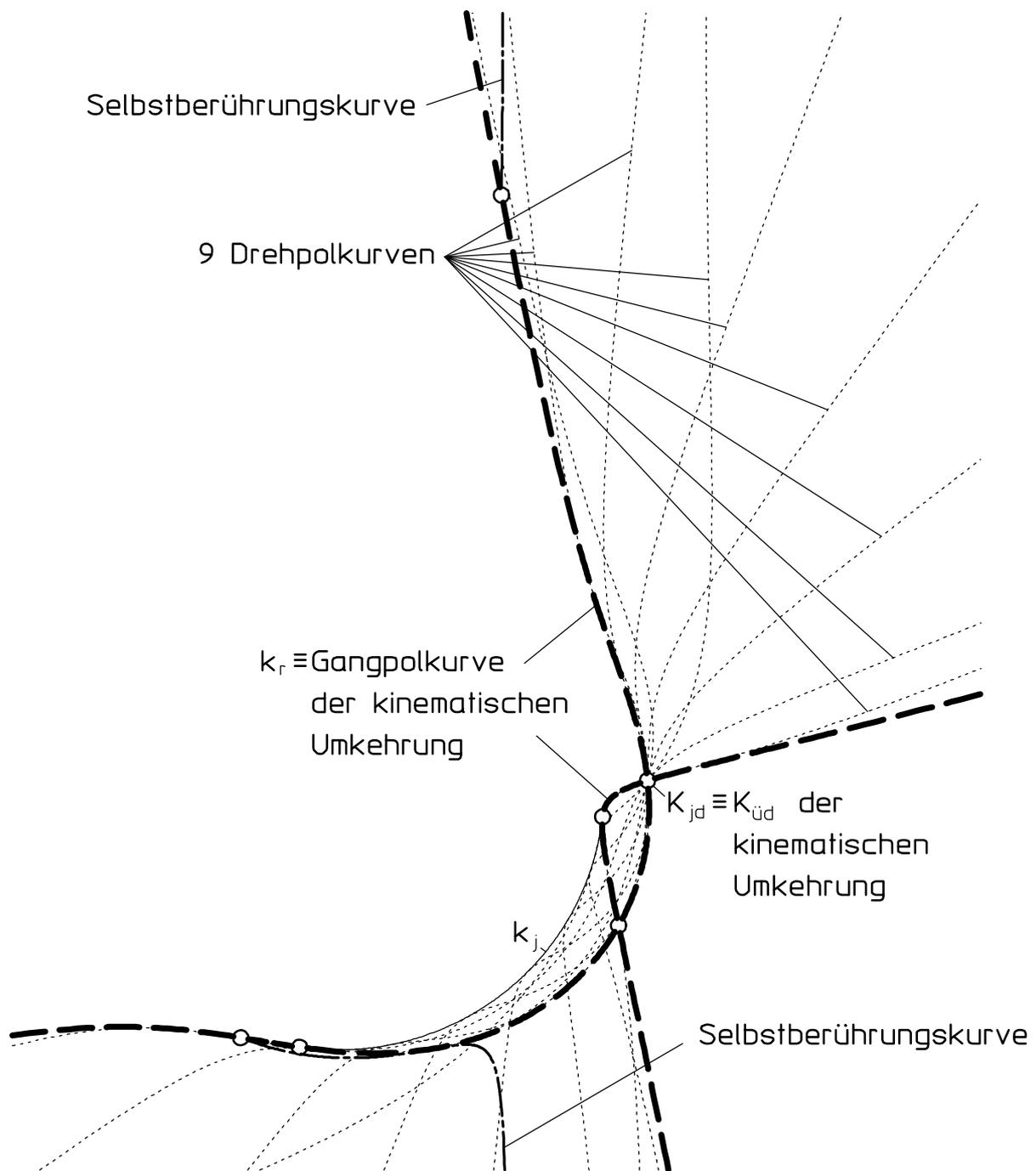


Bild 2.18: Die Rastpolkurve k_r und die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung einer Kurbelschwinge als Einhüllende der Drehpolkurven

auftreten, werden durch die Gangpolkurve und die Übergangskurve gebildet (vgl. Bild 2.7, S. 16). Sind beide Kurven bekannt, läßt sich das Gebiet, in dem Doppelpunkte auftreten, also leicht ermitteln. Die Gangpolkurve ist nun identisch mit der Rastpolkurve der kinematischen Umkehrung und umgekehrt. Das in den folgenden Abschnitten erläuterte Bild 2.17 (S. 28) zeigt anhand eines viergliedrigen Gelenkgetriebes, daß ein Doppelpunkt ebenfalls ein Doppelpunkt der kinematischen Umkehrung ist.

Das Bild zeigt das Getriebe A_0ABB_0 in einer Ausgangslage, in der der Punkt K_D sich in einem Doppelpunkt seiner Bahn befindet. Die zweite zum Doppelpunkt K_D gehörende Getriebelage zeigt das Getriebe $A_0A'B'B_0$. Wird in der Getriebebelage A_0ABB_0 ein Gestellwechsel derart vorgenommen, daß die Koppel AB zum neuen Gestell wird, so bildet das so erhaltene Getriebe J_0JLL_0 die kinematische Umkehrung des ursprünglichen. Soll dieses Getriebe eine Stellung verwirklichen, die der relativen Lage jedes Gliedes zu einem benachbarten in der Lage $A_0A'B'B_0$ des Ausgangsgetriebes entspricht, so muß das Getriebe $A_0A'B'B_0$ um den Punkt K_D mit dem Winkel α gedreht werden, so daß das Koppeldreieck $\triangle A'B'K_D$ über dem Koppeldreieck $\triangle ABK_D$ zu liegen kommt. Es entsteht die Getriebebelage $J_0J'L'L_0$ der kinematischen Umkehrung.

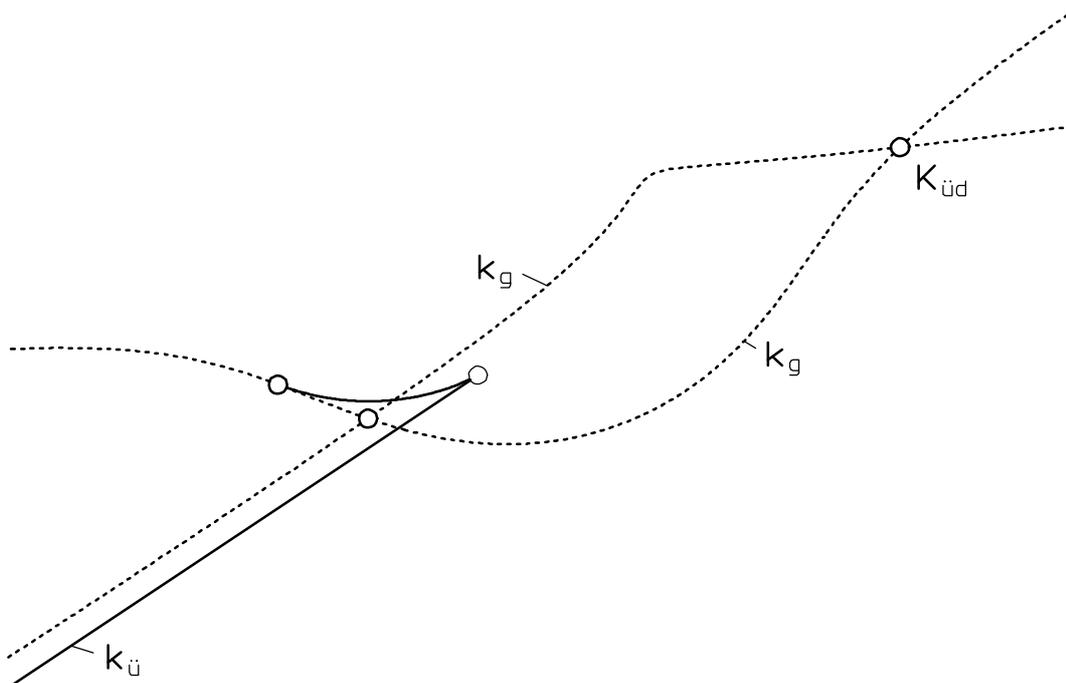
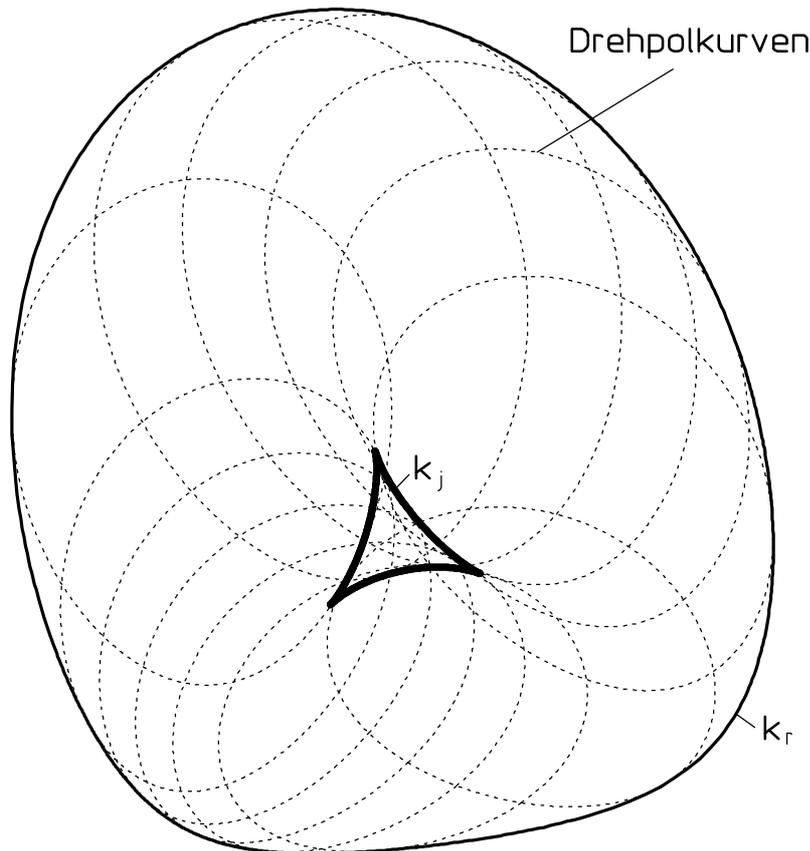


Bild 2.19: Verlauf der Gangpolkurve k_g und der Übergangskurve k_u einer Kurbelschwinge mit den Abmessungen $l_1=120$, $l_2=500$, $l_3=350$, $l_4=275$

Der Doppelpunkt K_D der Koppel JL der kinematischen Umkehrung liegt definitionsgemäß im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten $n_{mJJ'}$ und $n_{mLL'}$ zu den Strecken JJ' und

LL'. Da der Punkt J um den Punkt K_D in die Lage J' gedreht wurde und ebenfalls der Punkt L um den Punkt K_D in die Lage L', liegt der Punkt K_D zwangsläufig im Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten $n_{mJJ'}$ und $n_{mLL'}$, die in diesem Fall identisch mit den Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle J'K_DJ$ bzw. $\sphericalangle L'K_DL$ sind. Hiermit ist bewiesen, daß der Doppelpunkt K_D eines allgemein bewegten Getriebegliedes $\triangle ABK_D$ auch ein Doppelpunkt des allgemein bewegten Gliedes der kinematischen Umkehrung $\triangle JLK_D$ ist.



$\odot K_{jd1} (=A_0)$

$K_{jd2} (=B_0) \odot$

Bild 2.20: Die Drehpolkurven einer umlauffähigen Doppelschwinge und ihre Einhüllenden: die Rastpolkurve k_r und die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung

Da die Übergangskurve eine Grenze eines Feldes mit Doppelpunkten in der Koppellebene darstellt, muß geschlossen werden, daß die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung eine Grenze des Feldes mit Doppelpunkten der kinematischen Umkehrung und

damit eine Grenze des Feldes mit Doppelpunkten in der gestellfesten Ebene ist (Bild 2.18, S. 29). Die Rastpolkurve und die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung bilden somit die Einhüllende der Drehpolkurven, deren Kurvenschar definitionsgemäß den Ort aller Doppelpunkte in der gestellfesten Ebene bildet.

Diese Erkenntnis erklärt - wenn typische Verläufe der Gangpol- und der Übergangskurven von Kurbelschwingen und deren Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{üd}$ [Bild 2.7 (S. 16) sowie Bild 2.19 (S. 30), vgl. auch Bild 6.43, S. 248] bekannt sind - warum sich die Drehpolkurvenschar der Kurbelschwinge nur an einer Stelle einschnürt, nämlich in dem mit $K_{üd}$ identischen Dauer-Übergangskurvenpunkt K_{jd} der kinematischen Umkehrung (Bild 2.18, S. 29). Es wird auch klar, weshalb keine optische Einschnürung der Drehpolkurven von umlauffähigen Doppelschwingen zu finden ist (Bild 2.20, S. 31; vgl. auch [19]): Die Drehpolkurven bilden eine einzige von der Rastpolkurve k_r umschlossene, keine Einschnürung aufweisende „Wolke“ von Doppelpunkten. Die Rastpolkurve weist keine Selbstschnittpunkte auf und die beiden Dauer-Übergangskurvenpunkte K_{jd1} und K_{jd2} der kinematischen Umkehrung, die sich in den gestellfesten Drehgelenken A_0 und B_0 befinden, liegen nicht auf der Übergangskurve der kinematischen Umkehrung k_j .

2.6.3 Modifikationsmöglichkeiten für das Polortverfahren und deren Grenzen

Wie aus Bild 2.20, S. 31, hervorgeht, ist es nicht möglich, das Polortverfahren [11] auf umlauffähige Doppelschwingen anzuwenden. Eine Synthese mit Hilfe der Rastpolkurve [15] scheidet ebenfalls aus, da die Rastpolkurve keine Selbstschnittpunkte aufweist.

Werden die Drehpolkurven und die Rastpolkurve in die Koppellebene transformiert (vgl. Abschnitt 5.2.3), so erhält man die Doppelpunktkurven und die Gangpolkurve (Bild 2.20.a, S. 33). Die Doppelpunktkurven weisen Einschnürungen in den Dauerübergangskurvenpunkten $K_{üd1}$ und $K_{üd2}$ auf. Da in den Dauerübergangskurvenpunkten die Koppelgelenke liegen, ist es naheliegend, eine Synthese von umlauffähigen Doppelschwingen mit Hilfe der Doppelpunktkurven zu versuchen - analog zum Drehpolkurven benutzenden Polortverfahren.

Für die Entscheidung, ob eine Synthese mit Hilfe der Doppelpunktkurven für ein viergliedriges Gelenkgetriebe in Frage kommt, ist die Kenntnis aller möglichen Formen von Übergangskurven und Gangpolkurven - den Einhüllenden der Doppelpunktkurven - notwendig. Für umlauffähige Doppelschwingen geht leider aus Bild 6.44 (S. 250) hervor, daß zwar mit zwei Einschnürungen der Doppelpunktkurven zu rechnen ist (es gibt immer zwei Berührungspunkte der Grenzen von Feldern, deren Punkte keine Koppelgelenkbahnen mit Selbstschnittpunkten erzeugen und die somit frei von Punkten der Doppelpunktkurven sind). Oft jedoch befindet sich nur in einer der beiden Einschnürungen ein Anlenkpunkt (ikonische

Darstellungen A bis F): der zweite Anlenkpunkt läßt sich in diesen Fällen nicht mit Hilfe der Doppelpunktkurven ermitteln.

Analog zur Synthese mit Hilfe der Rastpolkurve [15] wird daher an dieser Stelle für das Ermitteln der beiden Koppelgelenke von umlauffähigen Doppelschwingen die Synthese mit Hilfe der Gangpolkurve k_g vorgeschlagen (Bild 2.20.a). Wie bei der Synthese mit Hilfe der Rastpolkurve muß auch bei der Synthese mit Hilfe der Gangpolkurve geprüft werden, in welchen (von den drei) Selbstschnittpunkten der Gangpolkurve tatsächlich (die beiden) Anlenkpunkte (der umlauffähigen Doppelschwinge) liegen können⁷⁾.

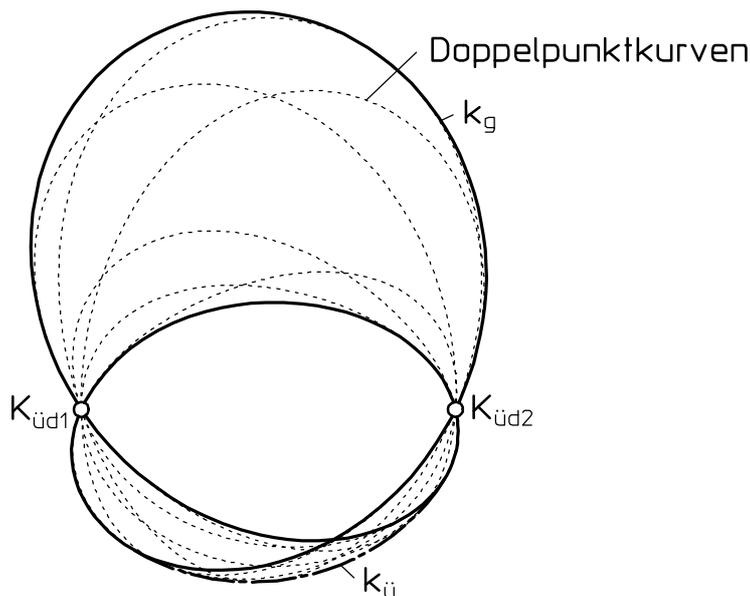


Bild 2.20a: Die Doppelpunktkurven einer umlauffähigen Doppelschwinge und ihre Einhüllenden: die Gangpolkurve k_g und die Übergangskurve k_u

2.7 Die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden

2.7.1 Die gestellfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden

Der geometrische Ort des Vorkommens von Doppelpunkten läßt sich in einigen Fällen einschränken, da alle Doppelpunkte auf der Mittelsenkrechten der Verbindungslinie von

⁷⁾ Aufgrund der mehrfachen Erzeugung von Koppelpunktbahnen (Satz von ROBERTS) lassen sich allerdings alle Koppelpunktbahnen von umlauffähigen Doppelschwingen auch von Kurbelschwingen erzeugen [20].

zwei verschiedenen Lagen eines Punktes der allgemein bewegten Ebene liegen. Ist die Ebene durch eine Schwinde im Gestell gelagert (Bild 2.21), so überstreicht die Schwinde B_0B einen Winkel $\Delta\psi$, der durch zwei Geraden - im folgenden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s genannt - gebildet wird. Alle Mittelsenkrechten der Verbindungslinie von zwei verschiedenen Lagen des Punktes B gehen durch den Punkt B_0 und liegen innerhalb des gepunkteten Bereichs, der somit den potentiellen geometrischen Ort aller Drehpolkurven bildet. Alle Punkte der Selbstberührungskurve k_s , der Rastpolkurve k_r und der (außerhalb der Bildgrenzen liegenden) Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung müssen ebenfalls in dem beschriebenen Bereich liegen, da sie gleichfalls Doppelpunkte (bzw. die beiden letztgenannten zusätzlich die Einhüllenden der Drehpolkurven) darstellen.

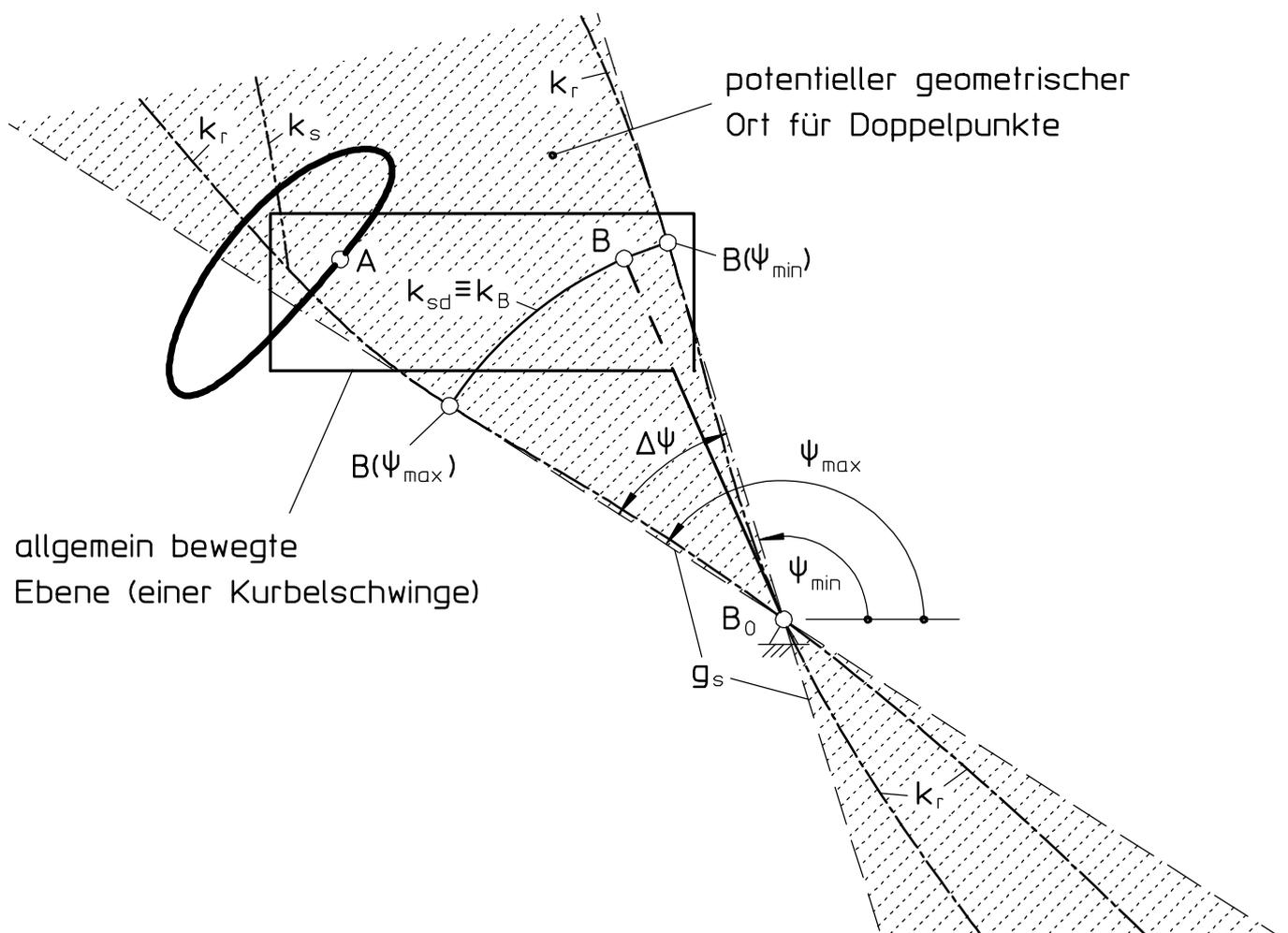


Bild 2.21: Gestellfeste Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s einer Kurbelschwinge

Da die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s den Grenzfall der Mittelsenkrechten der Verbindungslinie von zwei verschiedenen Lagen des Punktes B bilden, liegt jeweils min-

destens ein Doppelpunkt auf den Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden. In Abschnitt 2.6.2 wurde gezeigt, daß die Rastpolkurve k_r und die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung den Bereich aller Doppelpunkte begrenzen. Aus diesem Grund müssen die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s die Rastpolkurve k_r oder die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung tangieren. Da das Schwinggelenk B einen Doppelpunkt darstellt und der Punkt B bei den Abtriebswinkeln $\psi = \psi_{\min}$ und $\psi = \psi_{\max}$ auf den Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s zu liegen kommt, bilden die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden in den Punkten $B(\psi_{\min})$ und $B(\psi_{\max})$ die Tangenten an die Rastpolkurve - und (im allgemeinen) keine Tangenten an die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung. Die zweite Schlußfolgerung wird durch die Tatsache unterstützt, daß das Schwinggelenk B ein Dauer-Übergangskurvenpunkt der kinematischen Umkehrung ist und somit (im allgemeinen) keinen Punkt der Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung darstellt.

Ist die allgemein bewegte Ebene durch zwei Schwingen im Gestell gelagert (Bild 2.22) - was nur bei einem viergliedrigen Gelenkgetriebe mit zwei Schwingen der Fall ist - und ist der von beiden Schwingen überstrichene Winkel kleiner als 180° , gibt es für jede Schwingung einen entsprechenden Bereich, in dem die oben beschriebenen Mittelsenkrechten liegen (Bild 2.22). Nur dort, wo sich beide Bereiche überlappen, liegt die Rastpolkurve k_r und kann eine Selbstberührungskurve k_s sowie die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung auftreten. Eine jede der paarweise auftretenden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sA0} und g_{sB0} tangiert die Rastpolkurve in den Endpunkten $A(\varphi_{\min})$, $A(\varphi_{\max})$, $B(\psi_{\min})$ bzw. $B(\psi_{\max})$ der Bahnen k_A bzw. k_B der Schwinggelenke A und B .

Die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_s ermöglichen einen guten Überblick darüber, ob eine optische Einschnürung der Drehpolkurvenschar bei einem vorgegebenen Getriebetyp zu erwarten ist.

Allgemein bewegte Ebenen, von denen ein Punkt in einer Schwingung gelagert ist (vgl. Bild 2.21), die einen Winkel kleiner als 180° überstreicht (wie z. B. die Koppellebene einer Kurbelschwingung), weisen (mindestens) einen Einschnürungsbereich der Drehpolkurvenschar auf, nämlich den Schnittpunkt der beiden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden.

Bei allgemein bewegten Ebenen, von denen zwei Punkte in Schwingungen gelagert sind, die einen Winkel kleiner als 180° überstreichen, gibt es verschiedene Ausprägungen für die Anzahl der Einschnürungsbereiche. Bei den die Bewegung erzeugenden Getrieben handelt es sich dabei entweder um umlauffähige Doppelschwingen oder um totalschwingfähige bzw. durchschlagfähige Doppelschwingen.

- Totalschwingfähige bzw. durchschlagfähige Doppelschwingen besitzen vier paarweise auftretende Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sA0} und g_{sB0} (Bild 2.23, S. 37), wobei die Gestellgerade als Verbindungslinie beider gestellfesten Schwinggelenke A_0 und B_0 immer in den Bereich des potentiellen geometrischen Orts der Doppelpunkte fällt. Daher weisen sie zwei Einschnürungen ihrer Drehpolkurvenschar auf, die in den beiden Schnittpunkten der jeweils zu einer Schwingung gehörenden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden liegen, wenn beide Schwingwinkel kleiner als 180° sind.

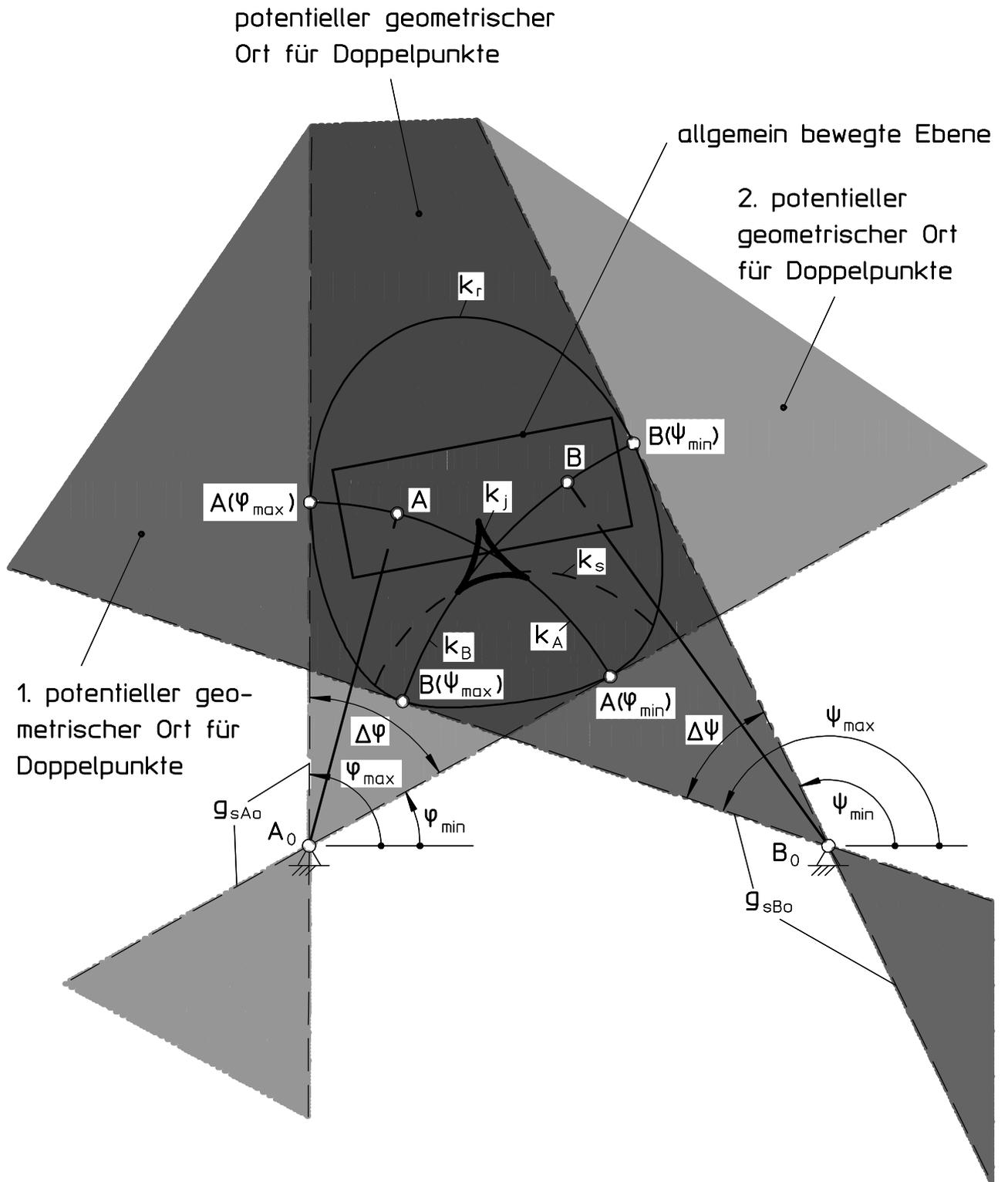


Bild 2.22: Gestellfeste Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sA_0} und g_{sB_0} einer umlauffähigen Doppelschwinge

-  1. potentieller geometrischer Ort für Doppelpunkte zwischen den beiden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sA0} , die den Winkel $\psi_{\max} - \psi_{\min}$ einschließen.
-  2. potentieller geometrischer Ort für Doppelpunkte zwischen den beiden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sB0} , die den Winkel $\Delta\psi$ einschließen.
-  potentieller geometrischer Ort für Doppelpunkte

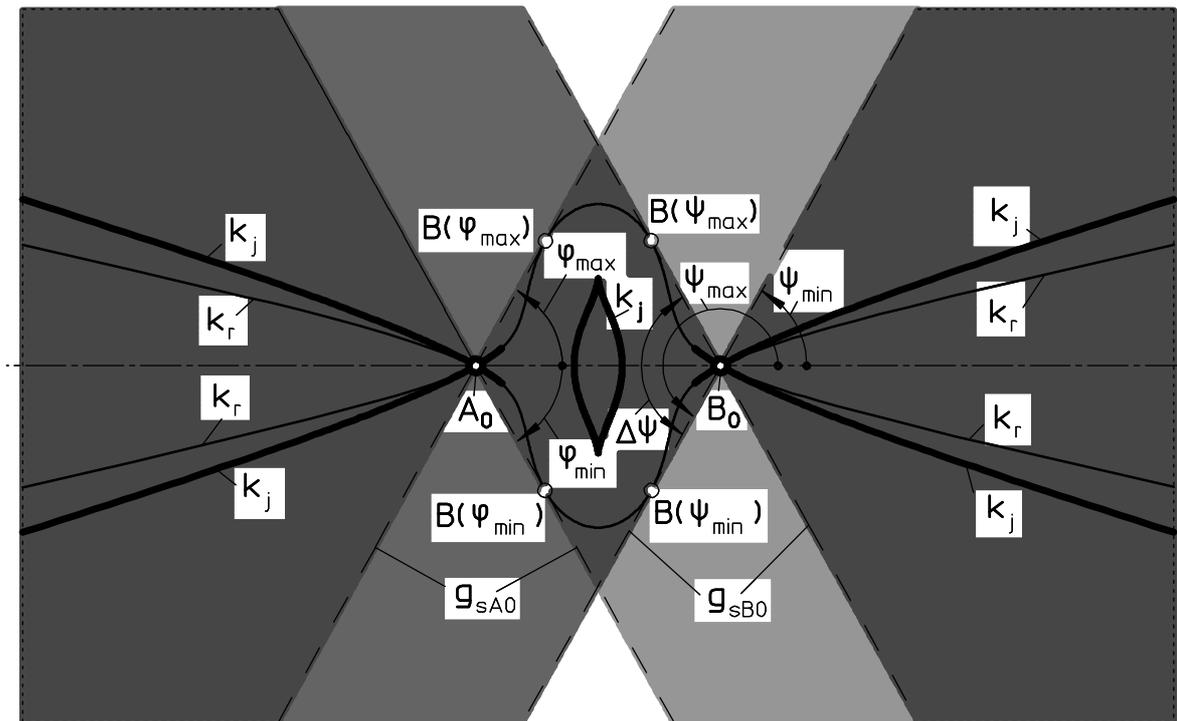


Bild 2.23: Gestellfeste Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sA0} und g_{sB0} einer totalschwingfähigen Doppelinnenschwinge

- Umlauffähige Doppelschwinge haben zwar ebenfalls vier Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden. Da sie aber ein bis ins Unendliche reichendes Viereck als potentiellen geometrischen Ort aller Doppelpunkte bilden (Bild 2.22) sind bei umlaufähigen Doppelschwinge keine Einschnürungen der Drehpolkurvenschar zu erwarten. (Theoretisch kann noch ein zweites bis ins Unendliche reichendes Viereck auf der anderen Seite der Gestellgeraden als weiterer Ort aller Doppelpunkte entstehen.)

Die Drehpolkurvenschar eines Getriebes weist im allgemeinen keine Einschnürung auf, wenn keine Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden existieren (weil z. B. keine gestellfesten Schwingengelenke - wie z. B. bei Doppelkurbeln - vorhanden sind) oder aber wenn die Schwinge einen Winkel größer als 180° überstreichen (z. B. bei vielen totalschwingfähigen Gelenkgetrieben oder ggf. bei n -gliedrigen M&G mit Schwinge).

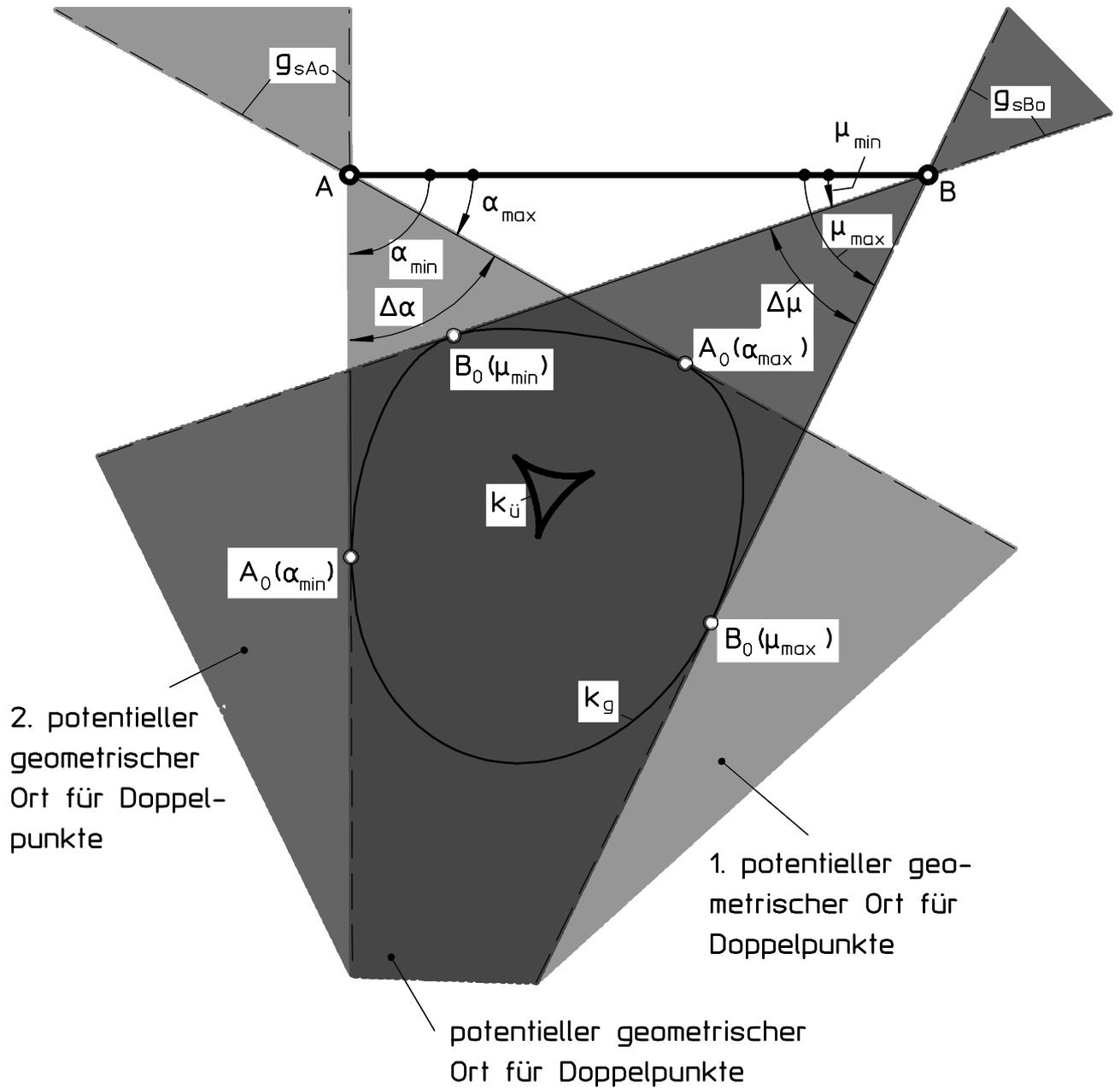


Bild 2.24: Koppelfeste Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden g_{sAo} und g_{sBo} einer umlauffähigen Doppelkurbel

2.7.2 Die korpelfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden

In Abschnitt 2.6.2 wurde gezeigt, daß alle Doppelpunkte einer allgemein bewegten Ebene gleichzeitig die Doppelpunkte der durch kinematische Umkehrung zum Gestell gewordenen Ebene darstellen.

Ist ein Punkt einer allgemein bewegten Ebene des Ausgangsgetriebes in einer Kurbel oder einer Schwin ge drehend gelagert, die zu der bewegten Ebene einen Schwingwinkel kleiner als 180° aufweist, so existieren für die kinematische Umkehrung gestellfeste Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden, die den geometrischen Ort aller Doppelpunkte und damit aller Drehpolkurven eingrenzen. Aus dieser Tatsache kann folgendes geschlossen werden:

Ist ein Punkt einer allgemein bewegten Ebene des Ausgangsgetriebes in einer Kurbel oder einer Schwin ge drehend gelagert, die zu dieser Ebene einen Schwingwinkel kleiner als 180° aufweist, so begrenzen die korpelfesten Schwin gwinkel-Begrenzungsgeraden g_s den potentiellen geometrischen Ort aller Doppelpunktkurven und daher auch deren Einhüllenden der Gangpolkurve und der Übergangskurve (Bild 2.24). Jede Schwingwinkel-Begrenzungsgerade ist gleichzeitig eine Tangente der Gangpolkurve, da diese die Rastpolkurve der kinematischen Umkehrung bildet und die korpelfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden identisch mit den gestellfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden der kinematischen Umkehrung sind. Daß die gestellfesten Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden Tangenten der Rastpolkurve darstellen, wurde schon in Abschnitt 2.7.1 gezeigt.

3 Die Eigenschaften von Kurven für die Feldeinteilung einer bewegten Ebene

In diesem Kapitel werden noch einmal zusammenfassend alle Eigenschaften der Bahnen von Punkten auf oder neben

- der Gangpolkurve k_g ,
- der Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ und
- der BALLschen Kurve k_b

beschrieben. Diese drei Kurven teilen bekannterweise die Koppellebene in *Felder mit Punkten zum Erzeugen qualitativ gleicher Punktbahnen* ein [2].

Jede der genannten Kurven kann in die gestellfeste Ebene transformiert werden.

- Die Rastpolkurve k_r entsteht aus der Gangpolkurve k_g , indem in jeder Getriebestellung der momentan durchlaufene Punkt der Gangpolkurve in die gestellfeste Ebene transformiert wird.
- Analog zur Rastpolkurve entsteht die Selbstberührungskurve k_s aus der Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ dadurch, daß in jeder Getriebestellung die momentan durchlaufenen Übergangspunkte in die gestellfeste Ebene übertragen werden.
- Die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung wird dagegen folgendermaßen ermittelt: durch eine kinematische Umkehrung wird die betrachtete allgemein bewegte Ebene fixiert und gleichzeitig wird das Gestell von seiner Fixierung befreit. Nun werden die Gangpolkurve und die Übergangskurve der allgemein bewegten Ebene, die ursprünglich das Gestell bildete, berechnet. Wird diese Ebene mit ihrer Gangpolkurve und ihrer Übergangskurve durch eine weitere kinematische Umkehrung wieder zum Gestell, so wird die Gangpolkurve zur Rastpolkurve und die Übergangskurve zur Kurve k_j .
- Die Flachpunktkurve k_f entsteht aus der BALLschen Kurve, indem in jeder Getriebestellung der momentane BALLsche Punkt in die gestellfeste Ebene transformiert wird (vgl. auch Tabelle 8.1, S. 263).

3.1 Die Eigenschaften der Gangpolkurve

Die Gangpolkurve k_g ist die Folge derjenigen Punkte einer allgemein bewegten Ebene, die nach und nach auf den jeweiligen Momentanpolen P_{x0} der ruhenden Ebene zu liegen

kommen [20]. Bei einer ebenen Bewegung rollt die mit der bewegten Ebene verbundene Gangpolkurve k_g auf der mit der ruhenden Ebene verbundenen Rastpolkurve k_r ab. Gang- und Rastpolkurve berühren einander im Momentanpol. Die Gangpolkurve ist die Rastpolkurve der kinematischen Umkehrung (, die durch den Wechsel des Gestells mit der allgemein bewegten Ebene entsteht).

Der geometrische Ort der Lage der Gangpolkurve kann ohne Kenntnis der Doppelpunkt-kurven eingegrenzt werden, wenn ein oder zwei Punkte der allgemein bewegten Ebene Schwingengelenke sind und der von der Schwinge überstrichene Winkel relativ zur Ebene kleiner als 180° ist:

- 1) Ist ein Schwingengelenk vorhanden, grenzen die beiden Schwingwinkel-Begrenzungsgereaden durch dieses Gelenk den potentiellen geometrischen Ort ein, in dem Doppelpunkte und somit Gangpolkurvenpunkte liegen können (Bild 3.12, S. 54).
- 2) Sind zwei derartige Gelenke vorhanden, so wird das unter 1) geschilderte Verfahren auf jedes Gelenk angewandt, und es kommt für den potentiellen geometrischen Ort der Gangpolkurve nur die Schnittmenge der beiden einzeln ermittelten Bereiche in Frage (Bild 2.24, S. 38).

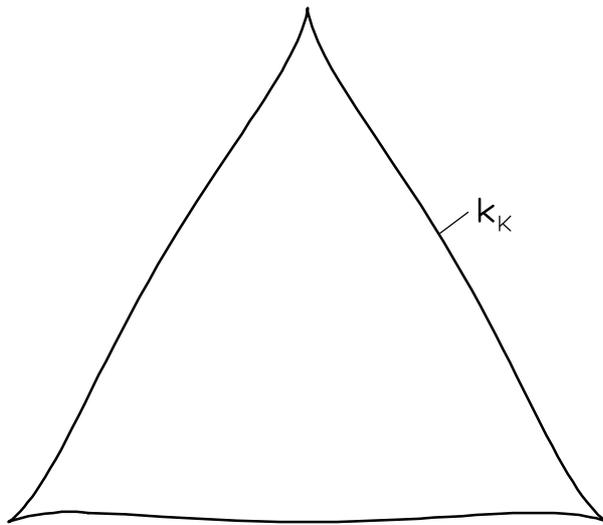


Bild 3.1: Koppelpunktbahn k_K mit drei Spitzen einer totalschwingfähigen Doppelinnenschwinge

Liegt ein Punkt in der bewegten Ebene auf der Gangpolkurve, so hat die erzeugte Bahn eine Spitze. Diese wird durchlaufen, wenn der erzeugende Punkt über dem Momentanpol

und somit über¹⁾ der Rastpolkurve liegt. Die Bahn eines Selbstschnittpunktes der Gangpolkurve besitzt zwei Spitzen. Eine Koppelpunktbahn hat n Spitzen (Bild 3.1), wenn der sie erzeugende Punkt ein n -facher Schnittpunkt der Gangpolkurve ist (Bild 3.2) bzw. wenn die Gangpolkurve während einer Periode n -fach durchlaufen wird (Das ist z. B. bei Räder-

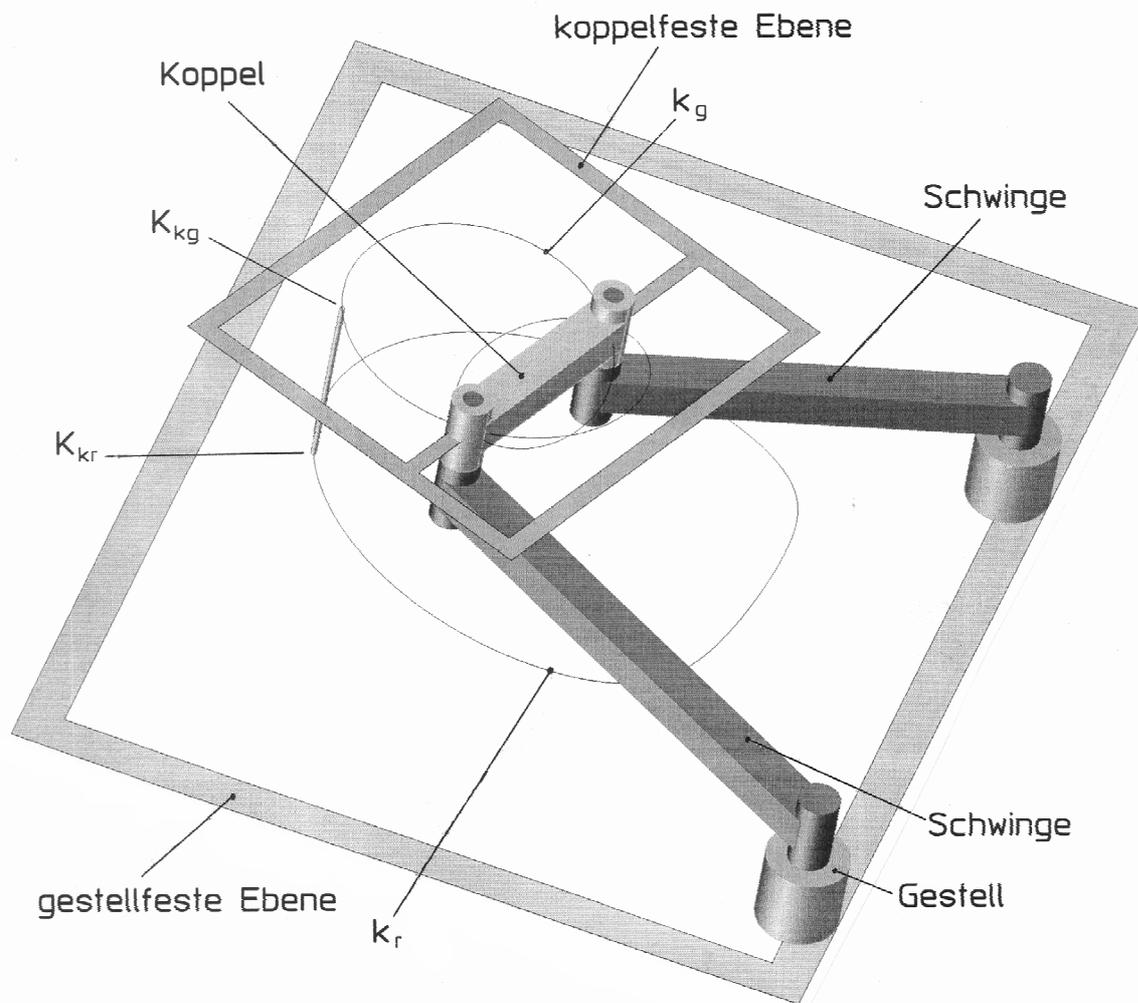


Bild 3.1a: Räumliche Anordnung eines Punktes K_{kg} der Gangpolkurve k_g in der koppel festen Ebene über einem Punkt K_{kr} der Rastpolkurve k_r in der gestell festen Ebene eines Gelenkgetriebes

¹⁾ Der Begriff *über* soll andeuten, daß sich der Punkt K_{kg} auf der Gangpolkurve k_g in einer anderen Ebene - nämlich der Koppel ebene (vgl. Bild 3.1a) - befindet als der Punkt K_{kr} auf der Rastpolkurve k_r - der in der gestell festen Ebene liegt.

getrieben oft der Fall - vgl. Bild 3.3.). Bei viergliedrigen Gelenkgetrieben ist die maximale Anzahl an Spitzen drei, die nur bei totalschwingfähigen und durchschlagfähigen Doppelnenschwingen [21] sowie bei durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen zu erreichen ist (vgl. Abschnitt 6.6.2.4). Der Krümmungsradius der Bahn ist in der Bahnspitze im allgemeinen gleich Null. Somit berührt die Evolute eine Bahn in deren Spitze (Bild 3.3a, S. 44), wenn es sich nicht um eine Schnabelspitze handelt (Bild 2.10, S. 19).

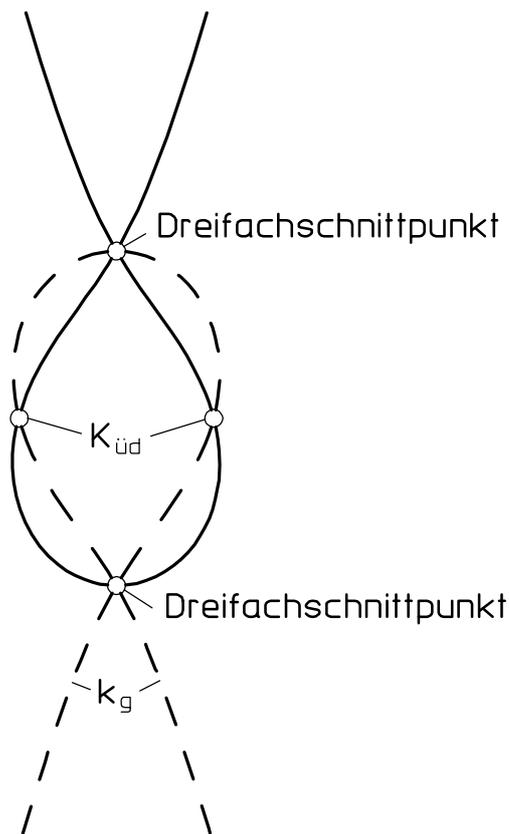


Bild 3.2: Gangpolkurve k_g einer Doppelnenschwinge mit Dreifachschnittpunkten

Die Gangpolkurve ist zusammen mit der Übergangskurve die Einhüllende der Doppelpunktkurven. Sie ist gleichzeitig zusammen mit der BALLSchen Kurve die Einhüllende der Wendekreise²⁾ k_w (Bild 3.4, S. 45) [4].

Bild 3.5 (S. 46) zeigt den Einfluß der Gangpolkurve auf die qualitative Ausprägung der Bahn eines Punktes der bewegten Ebene. Beeinflußt werden

- die Anzahl an Spitzen [2], und

²⁾ Der Wendekreis liegt in der allgemein bewegten Ebene. Er ist der geometrische Ort aller Punkte, die momentan einen Wendepunkt ihrer Bahn durchlaufen. Im Wendepunkt weisen diese Bahnen einen von $+\infty$ nach $-\infty$ springenden Krümmungsradius auf.

- die Anzahl an Wendepunkten,

da der Krümmungsradius in der Bahnspitze einen Nulldurchgang aufweist.

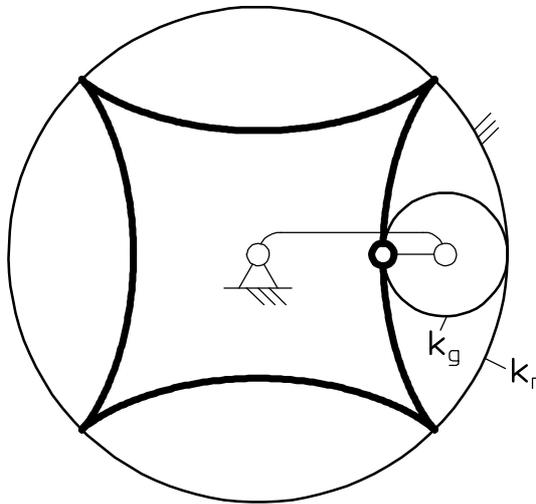


Bild 3.3: Hypotrochoide mit vier Spitzen

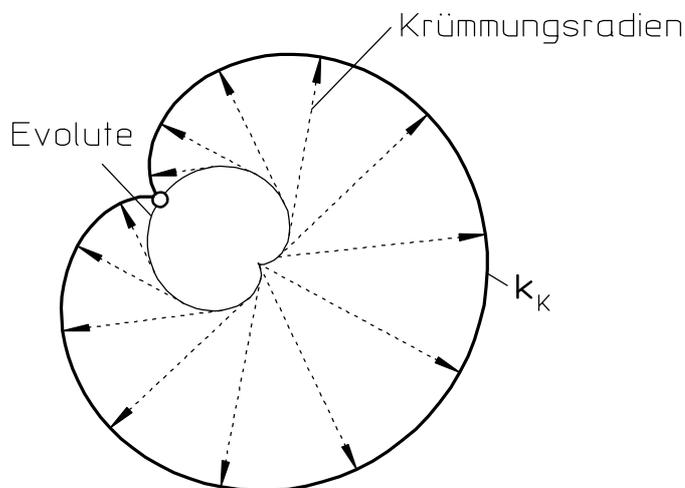


Bild 3.3a: Die Spitze einer Koppelpunktbahn k_k und deren Evolute

Ein Punkt K_D der Gangpolkurve erzeugt immer eine Bahn k_{KD} mit einer Spitze. Punkte in geringem Abstand zum Punkt K_D auf unterschiedlichen Seiten der Gangpolkurve erzeugen entweder eine Bahn mit einer Schlinge anstelle der Spitze (vgl. die Bahn k_{k1}) oder eine Bahn, bei der eine „abgerundete“ Spitze durchlaufen wird (vgl. die Bahn k_{k0}).

Die Bahn k_{k1} weist anstelle der Spitze eine Schlinge auf und besitzt somit einen Selbstschnittpunkt (mehr als die Bahn k_{k0} eines Punktes auf der anderen Seite der Gangpol-

kurve). Der Krümmungsmittelpunkt befindet sich in dem gezeigten Fall immer auf der gleichen Seite der Koppelpunktbahn (siehe gepunktete Markierungslinie, die die Lagen der Pfeilspitzen der Krümmungsradien angibt), und somit weist diese Kurve zwei Wendepunkte - die ja einen Wechsel des Krümmungsmittelpunktes von einer Seite der Bahn auf die andere darstellen - weniger auf als die Bahn k_{K_0} eines Punktes der anderen Seite der Gangpolkurve.

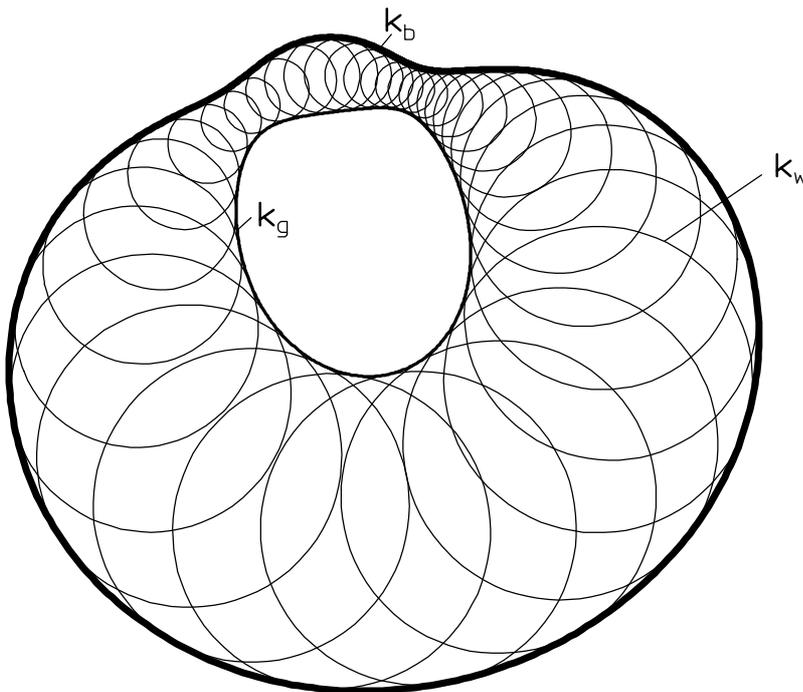


Bild 3.4: Die Gangpolkurve k_g und die BALLSche Kurve k_b als Einhüllende der Wendekreise k_w

Bei einem Punkt K_D , der auf der Gangpolkurve liegt, ist die vom Punkt K_1 erzeugte Schlinge zu einer Spitze entartet. In der Spitze der Bahn des Punktes K_D befindet sich der Krümmungsmittelpunkt im allgemeinen auf der Bahn, weil der Krümmungsradius ρ gleich Null ist. Die Bahnen von Punkten der durch die Gangpolkurve getrennten Felder weisen (n) bzw. $(n+1)$ Selbstschnittpunkte auf (vgl. die Bahnen k_{K_1} und k_{K_0}), und ein Punkt K_D auf der Gangpolkurve erzeugt eine Bahn mit der geringeren Anzahl an Selbstschnittpunkten - nämlich (n) . Analog gilt: die Bahnen von Punkten der durch die Gangpolkurve getrennten Felder weisen (n) bzw. $(n+2)$ Wendepunkte auf (vgl. die Bahnen k_{K_1} und k_{K_0}) und ein Punkt K_D auf der Gangpolkurve eine Bahn mit (n) .

Bei der Bahn k_{K_0} eines Punkt K_0 , der sich auf der anderen Seite der Gangpolkurve als der Punkt K_1 befindet, ist die Bahnspitze „abgerundet“ worden, so daß sich der Krümmungsmittelpunkt des „abgerundeten Teils der Spitze“ auf der anderen Seite der Bahn k_{K_0} des Punktes K_0 befindet als die angrenzenden Teile der Bahn (bzw. als „der abgerundete Teil vor dem Abrunden“ (siehe Markierungslinie). Die Bahn k_{K_0} weist daher zwei

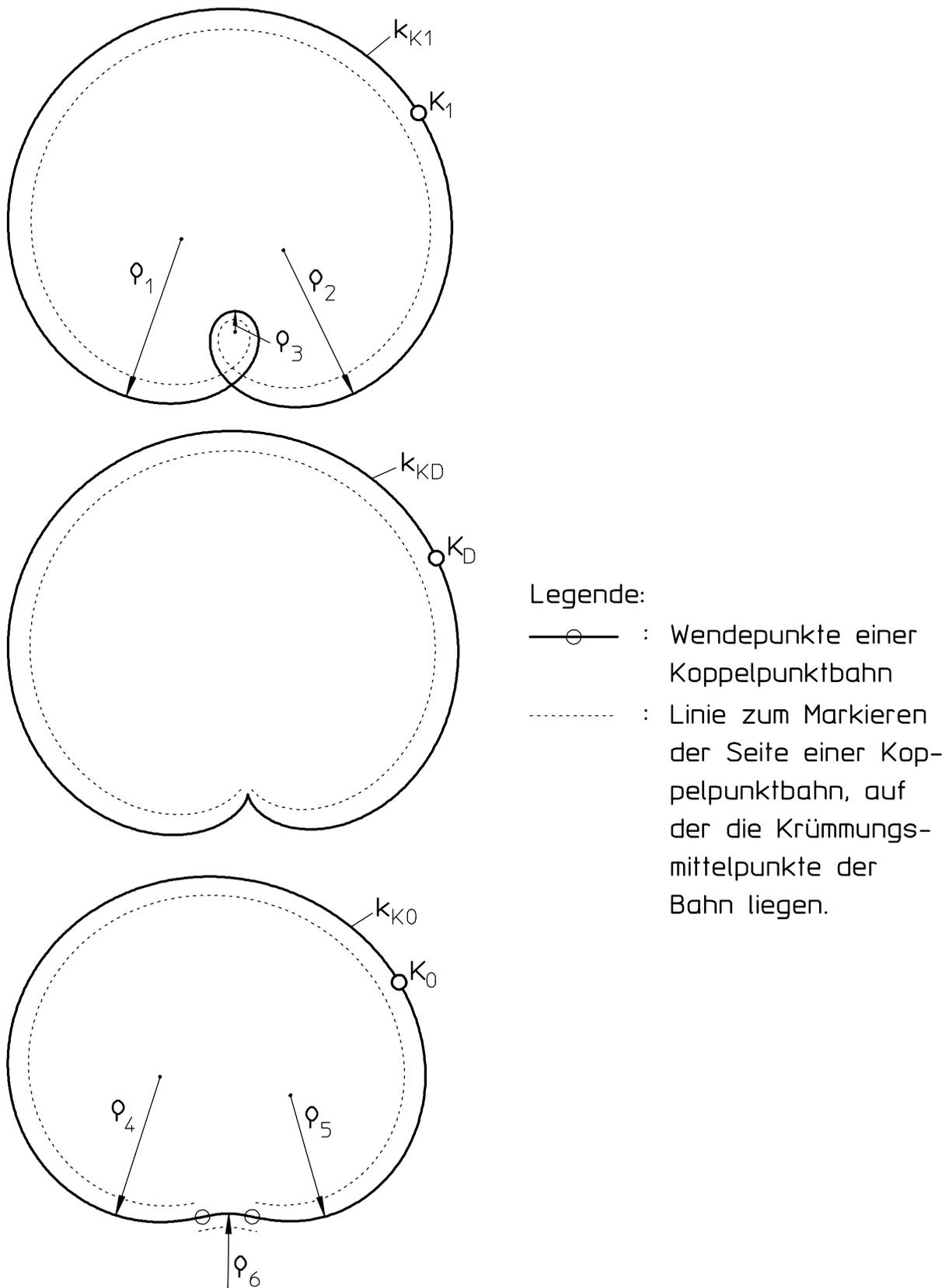


Bild 3.5: Die Bahn k_{KD} eines Punktes K_D auf der Gangpolkurve im Vergleich zu den Bahnen k_{K0} und k_{K1} von benachbarten Punkten, die auf verschiedenen Seiten der Gangpolkurve liegen

Die abgebildeten Bahnen wurden erzeugt von einem Galloway Getriebe mit $l \quad 10 \quad l \quad 70 \quad l \quad 70 \quad l \quad 10$

(durch 0-Kreise markierte) Wendepunkte mehr und einen Selbstschnittpunkt weniger auf als die Bahn k_{K_1} des Punktes K_1 .

Punkte auf verschiedenen Seiten der Gangpolkurve erzeugen also Bahnen, die in der Anzahl der Selbstschnittpunkte eine Differenz von eins und in der Anzahl der Wendepunkte eine Differenz von zwei aufweisen, wobei eine Bahn mit der höheren Anzahl an Selbstschnittpunkten eine geringere Anzahl an Wendepunkten besitzt und umgekehrt.

Der Einfluß der Gangpolkurve auf die Wendepunkte der Bahnen von Punkten angrenzender Felder kann unwirksam werden, wenn für mehrere aufeinanderfolgende Getriebelagen die Gangpolkurve mit der BALLSchen Kurve identisch ist und sich der Einfluß beider Kurven gegenseitig aufhebt (vgl. Gangpolkurve und BALLSche Kurve des Kardankreispaars in Abschnitt 4.5).

3.2 Die Eigenschaften der Übergangskurve

Die Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ ist die Folge derjenigen Punkte einer allgemein bewegten Ebene, die nach und nach auf einem Selbstberührungspunkt zu liegen kommen. Daraus folgt: Liegt ein Punkt in der bewegten Ebene auf der Übergangskurve, so hat die von ihm erzeugte Bahn einen Selbstberührungspunkt. Dieser wird durchlaufen, wenn der erzeugende Punkt über dem zugehörigen Teil der Selbstberührungskurve k_s liegt.

Die Übergangskurve ist zusammen mit der Gangpolkurve die Einhüllende der Doppelpunktkurven (vgl. Bild 2.7, S. 16). Die Übergangskurve k_j der kinematischen Umkehrung ist zusammen mit der Rastpolkurve (die die Gangpolkurve der kinematischen Umkehrung bildet) die Einhüllende der Drehpolkurven (vgl. Bild 2.20, S. 31).

Die Anzahl der Übergangskurvenpunkte pro Getriebelage und somit die Anzahl der Übergangskurvenäste ist nicht auf eins begrenzt: Einerseits gibt es bewegte Ebenen, die keine Übergangskurve aufweisen (z. B. Getriebe zum Erzeugen von Hypotrochoiden mit der Standgetriebe-Übersetzung $i = 3/2$ - siehe Abschnitt 4.2.4). Andererseits besitzen zum Beispiel Getriebe mit der Standgetriebe-Übersetzung $i = 7/2$ zum Erzeugen von Epitrochoiden drei Übergangskurven (siehe Abschnitt 4.2.4).

Liegt ein Punkt in der allgemein bewegten Ebene auf der Übergangskurve, so berührt die von ihm erzeugte Bahn sich selbst, ohne sich zu schneiden. Eine Bahn weist zwei (n) Selbstberührungspunkte auf, wenn der erzeugende Punkt ein einfacher $[(n-1)$ -facher] Selbstschnittpunkt der Übergangskurve ist (Bild 3.6). In diesem Fall ist die Scheinübergangskurve als ein Ast der Übergangskurve zu behandeln. Die Spitze einer Übergangskurve erzeugt eine Bahn mit einem stark schleifenden Selbstschnittpunkt (vgl. Bahn $k_{K_{\ddot{u}S}}$ in Bild 3.7, S. 49), wenn diese Spitze nicht auf der Gangpolkurve liegt. Dieser schleifende Schnittpunkt entsteht folgendermaßen:

Die Bahn $k_{K_{\ddot{u}S}}$ in Bild 3.7 wird von der unteren Spitze $K_{\ddot{u}S}$ der Übergangskurve gemäß Bild 2.24, S.38, erzeugt. Ein Punkt K (in Bild 3.7) oberhalb dieser Spitze innerhalb des von der Übergangskurve umgrenzten Feldes erzeugt die Bahn k_K mit den drei Selbstschnittpunkten D_1 , D_2 und D_3 . Die Bahn eines Punktes $K_{\ddot{u}1}$ (bzw. $K_{\ddot{u}2}$) auf der Übergangskurve oberhalb dieser Spitze weist neben einem Selbstschnittpunkt einen Selbstberührungspunkt auf, der durch das Zusammenrücken zweier Selbstschnittpunkte entsteht - vgl. die Bahn $k_{K_{\ddot{u}2}}$ eines Punktes $K_{\ddot{u}2}$ links oberhalb und die Bahn $k_{K_{\ddot{u}1}}$ eines Punktes $K_{\ddot{u}1}$ rechts oberhalb der Spitze der Übergangskurve. Bei der Bahn des Punktes in der Spitze rücken der Übergangskurvenpunkt $K_{\ddot{u}2}$ (bzw. $K_{\ddot{u}1}$) und der Selbstschnittpunkt D_1 (bzw. D_3) bzw. alle drei Selbstschnittpunkte D_1 , D_2 und D_3 derart zusammen, daß ein stark schleifender Selbstschnittpunkt $K_{K_{\ddot{u}S}}$ entsteht.

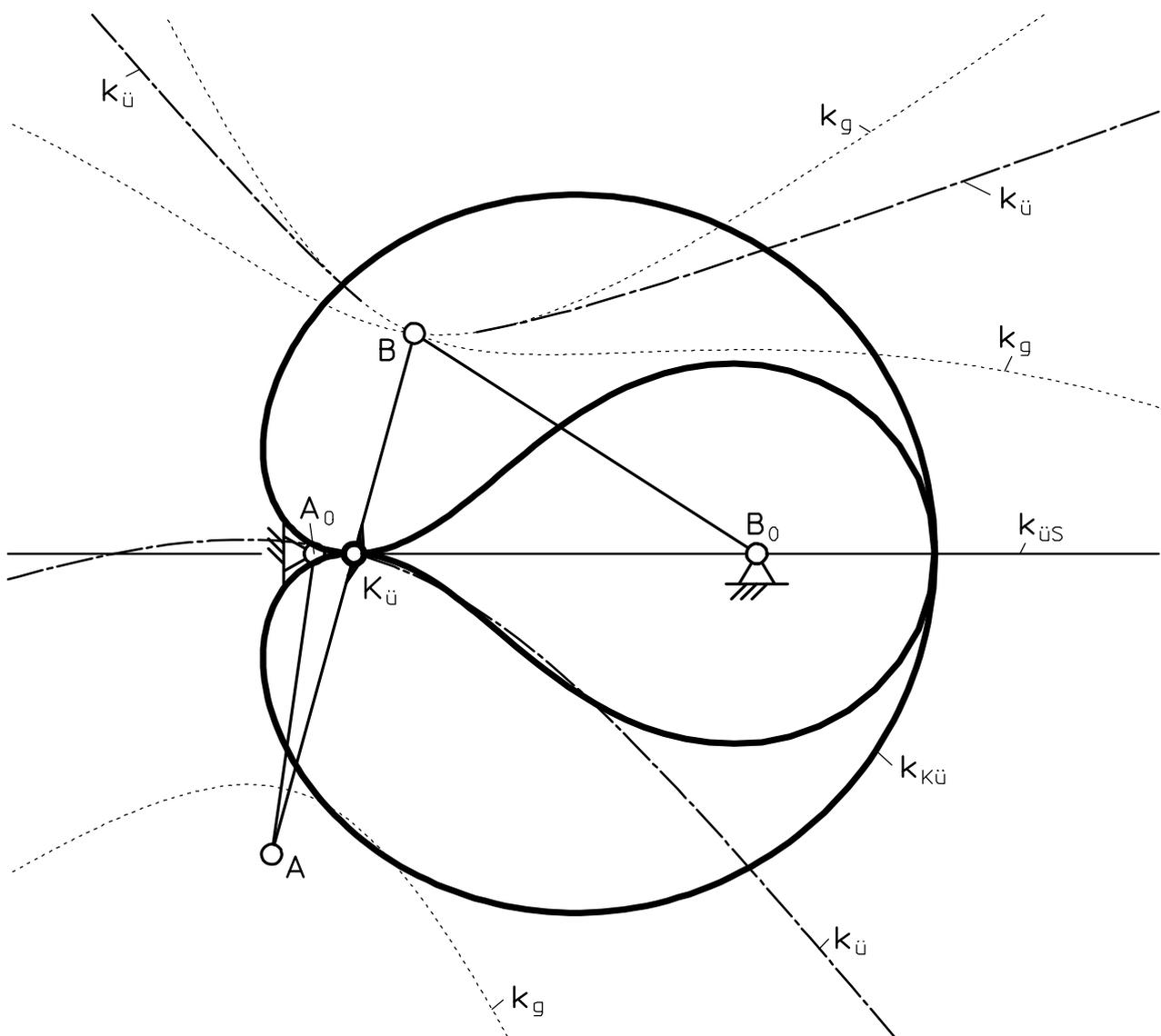


Bild 3.6: Koppelpunktbahn $k_{K_{\ddot{u}}}$ mit zwei Selbstberührungspunkten eines Punktes $K_{\ddot{u}}$ im Schnittpunkt der Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ mit der Scheinübergangskurve $k_{\ddot{u}S}$

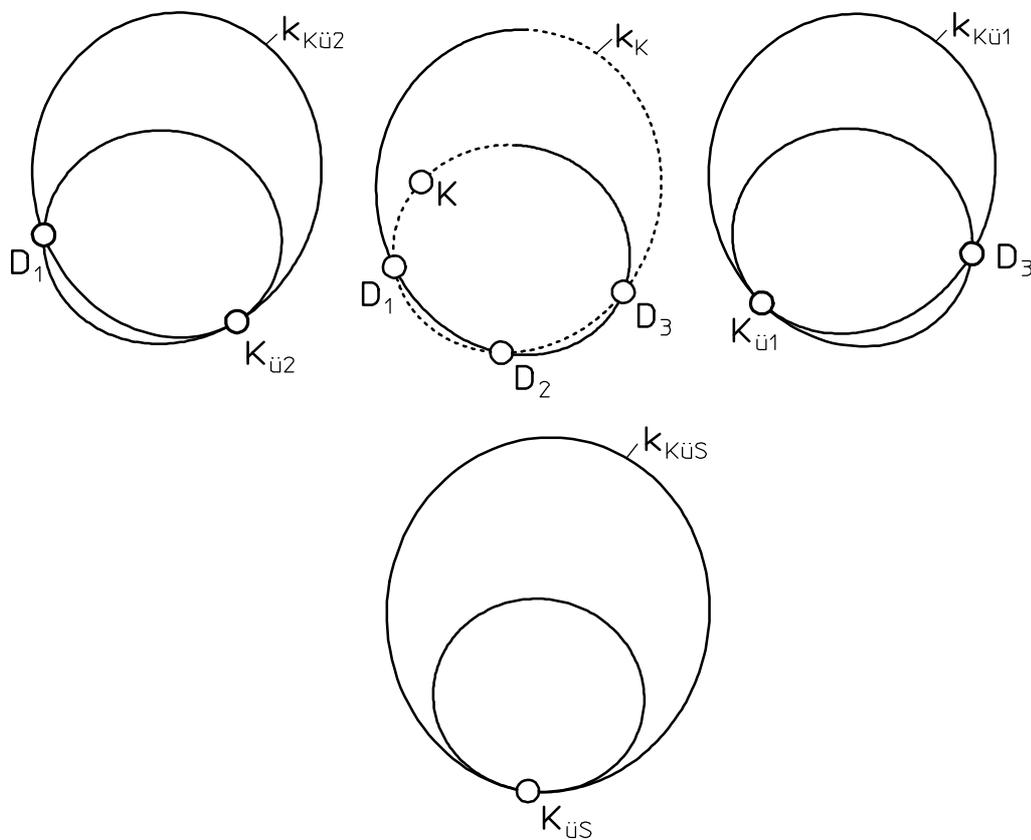
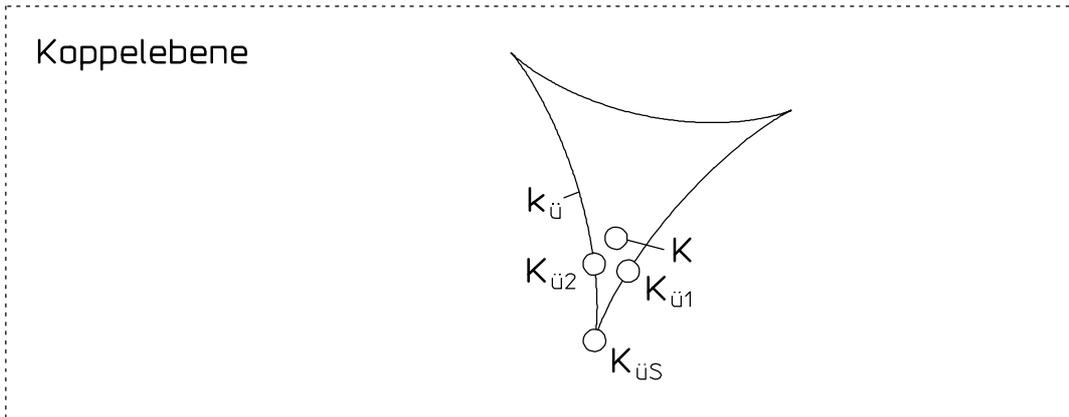


Bild 3.7: Koppelpunktbahnen $k_{K_{\ddot{u}S}}$, $k_{K_{\ddot{u}1}}$, $k_{K_{\ddot{u}2}}$ und k_K
 - eines Punktes $K_{\ddot{u}S}$ in der Spitze und
 - von Punkten $K_{\ddot{u}1}$, $K_{\ddot{u}2}$ und K in der Nähe der Spitze einer Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$

Beim Konstruieren der Übergangskurve wird jeder Ast mindestens zweimal durchlaufen, da jeder Punkt der Übergangskurve zwei verschiedenen Getriebebestellungen zuzuordnen ist. Diese Tatsache beruht auf dem Umstand, daß jeder Punkt der Übergangskurve eine

Bahn mit einem Selbstberührungspunkt erzeugt, und da jeder Selbstberührungspunkt auch ein reeller Doppelpunkt ist, gehört er zu zwei verschiedenen Getriebestellungen:

- 1) Ist ein Ast der Übergangskurve **eine** geschlossene Kurve wie z. B. bei einer Doppelkurbel (Bild 3.8), so wird er zweimal (im gleichem Umlaufsinn) durchlaufen.
- 2) Ist ein Ast der Übergangskurve phänomenologisch **keine** geschlossene Kurve wie z. B. bei einer Kurbelschwinge (Bild 3.9) und endet er nicht im Unendlichen, so fallen seine

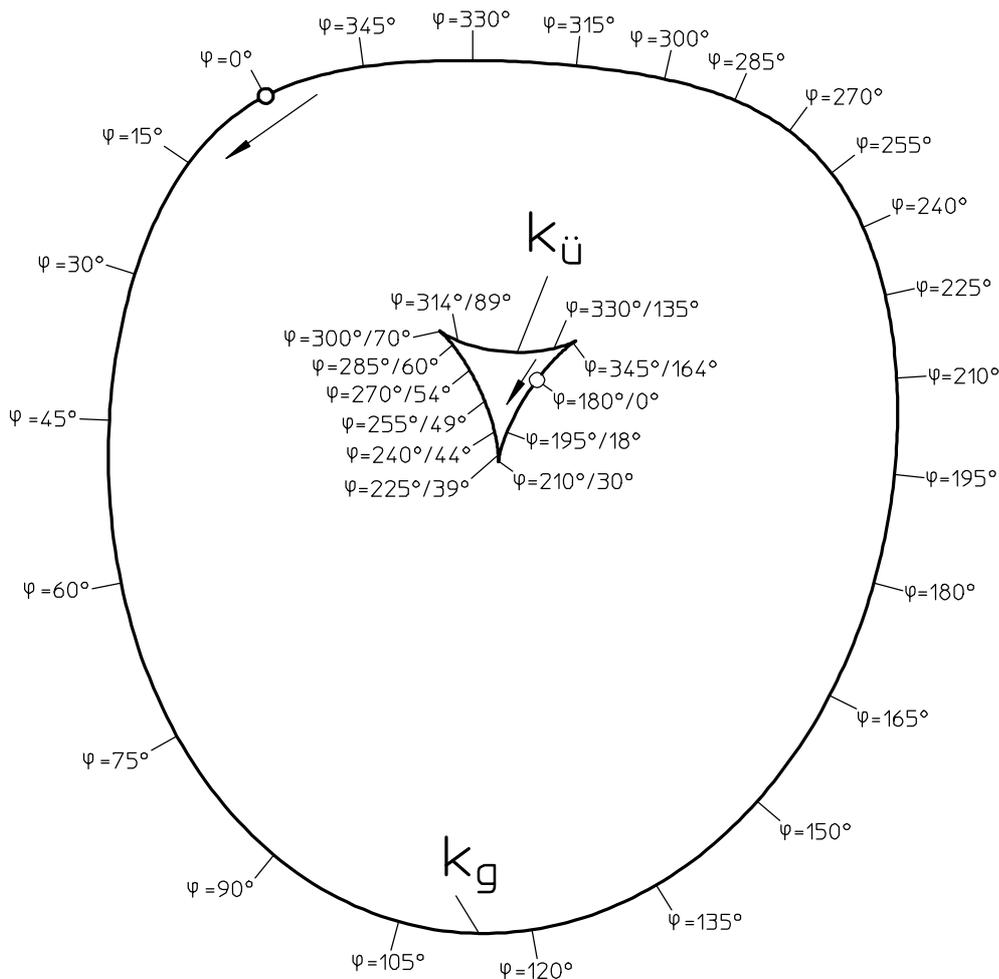


Bild 3.8: Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ und Gangpolkurve k_g einer umlauffähigen Doppelkurbel in Abhängigkeit vom Antriebswinkel ψ

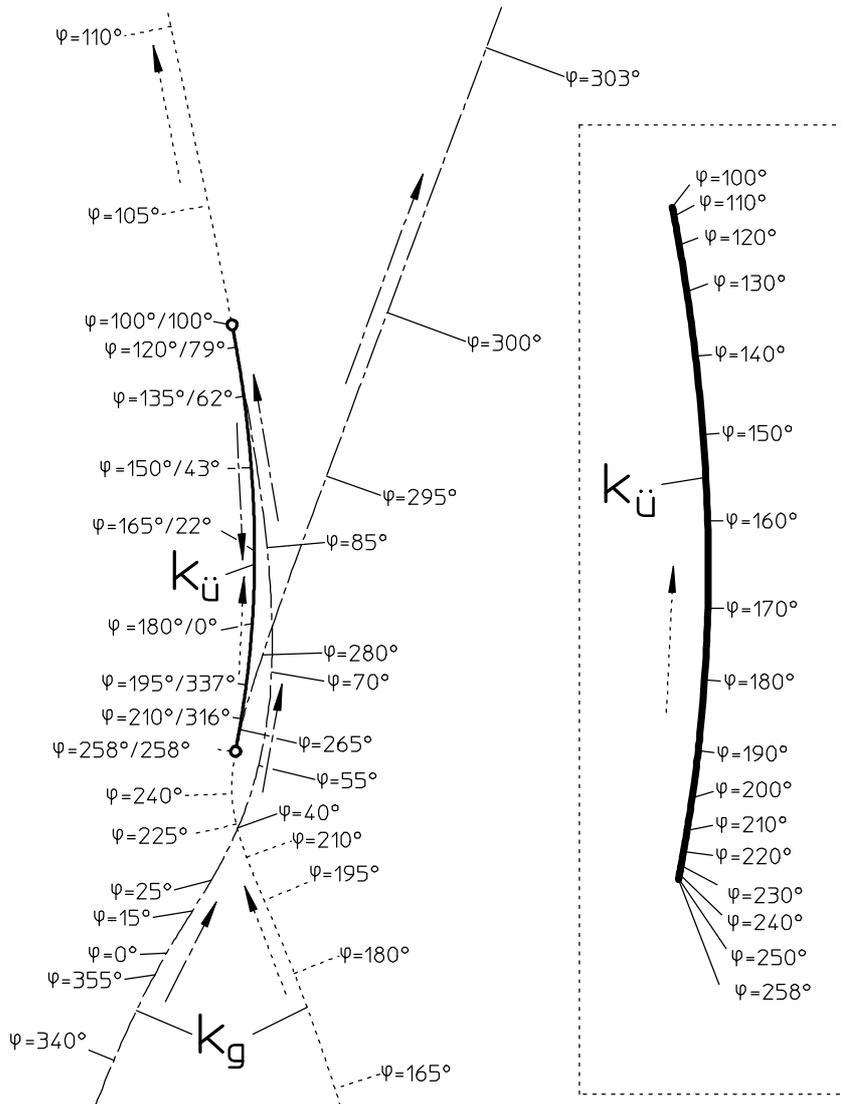


Bild 3.9: Übergangskurve k_u und Gangpolkurve k_g einer Kurbelschwinge in Abhängigkeit vom Antriebswinkel ψ .

(Rechts im Bild ist eine Durchlaufrichtung von k_u aufgetragen.)

beiden Endpunkte, bei denen es sich tatsächlich um Umkehrpunkte³⁾ handelt, mit Gangpolkurvenpunkten zusammen. Daß es sich um Umkehrpunkte handelt ist aus der Tatsache zu folgern, daß die Übergangskurve in beiden Richtungen durchlaufen wird (vgl. Bild 3.9 links). Bei den Umkehrpunkten handelt es sich um den Grenzfall, in dem

³⁾ Werden die Übergangskurvenpunkte in Abhängigkeit vom Antrieb unter Einhaltung einer konstanten Schrittweite ermittelt, so ist an den verringerten Abständen der berechneten Übergangskurvenpunkte in der Nähe der Umkehrpunkte zu erkennen, daß es sich tatsächlich um Umkehrpunkte und nicht um den Übergang zu einer Überlagerung von Übergangskurve und Gangpolkurve handelt (rechts in Bild 3.9).

der Übergangskurvenpunkt und die beiden ihm zugeordneten Gangpolkurvenpunkte übereinander liegen. Trotzdem liegen in diesem Grenzfall reelle Übergangskurvenpunkte vor.

Da die Übergangskurve und die Gangpolkurve die Einhüllenden der Doppelpunktkurven sind und somit im Berührungspunkt mit einer Doppelpunktkurve jeweils eine gemeinsame Tangente aufweisen, besitzen die Übergangskurve und die Gangpolkurve im Berührungspunkt, der gleichzeitig ein Umkehrpunkt der Übergangskurve ist, ebenfalls die gleiche Tangente.

Werden die Gangpolkurvenpunkte betrachtet, die beim Durchfahren der Übergangskurve von einem Umkehrpunkt zum anderen durchlaufen werden, so bilden sie zusammen mit dem betrachteten Übergangskurvenast wiederum eine geschlossene Kurve, die ggf. eine Asymptote aufweist. (In Bild 3.9 links bildet der gepunktet dargestellte Teil der Gangpolkurve mit der aufwärts durchlaufenen Übergangskurve eine geschlossene Kurve mit einer Asymptoten. Das gleiche gilt für den strichpunktiert dargestellten Teil der Gangpolkurve in Verbindung mit der abwärts durchlaufenen Übergangskurve.)

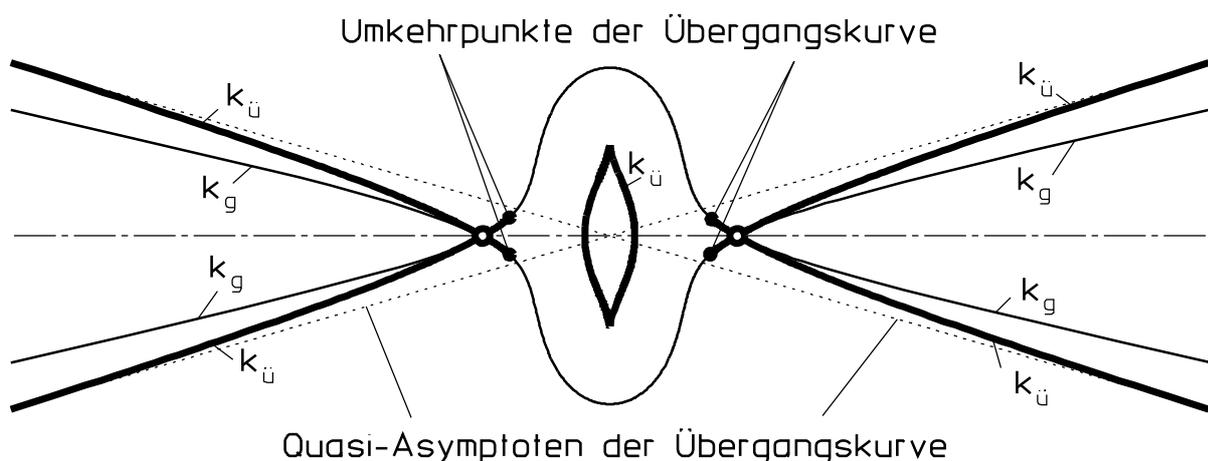


Bild 3.10: Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ mit Umkehrpunkten und Quasi-Asymptoten sowie die Gangpolkurve k_g einer total-schwingfähigen Doppelaußenschwinge

3) Endet ein Ast einer Übergangskurve im Unendlichen (Bilder 3.10 und 3.11), so ist folgendermaßen zu verfahren: dieser Ast ist zusammen mit dem Ast (den Ästen) der

Übergangskurve zu betrachten, mit dem (denen) er durch eine (Quasi-) Asymptote⁴⁾ verbunden ist. Die gemeinsam betrachteten Übergangskurvenäste lassen sich nun den Punkten 1) [Bild 3.11] oder 2) [Bild 3.10] zuordnen.

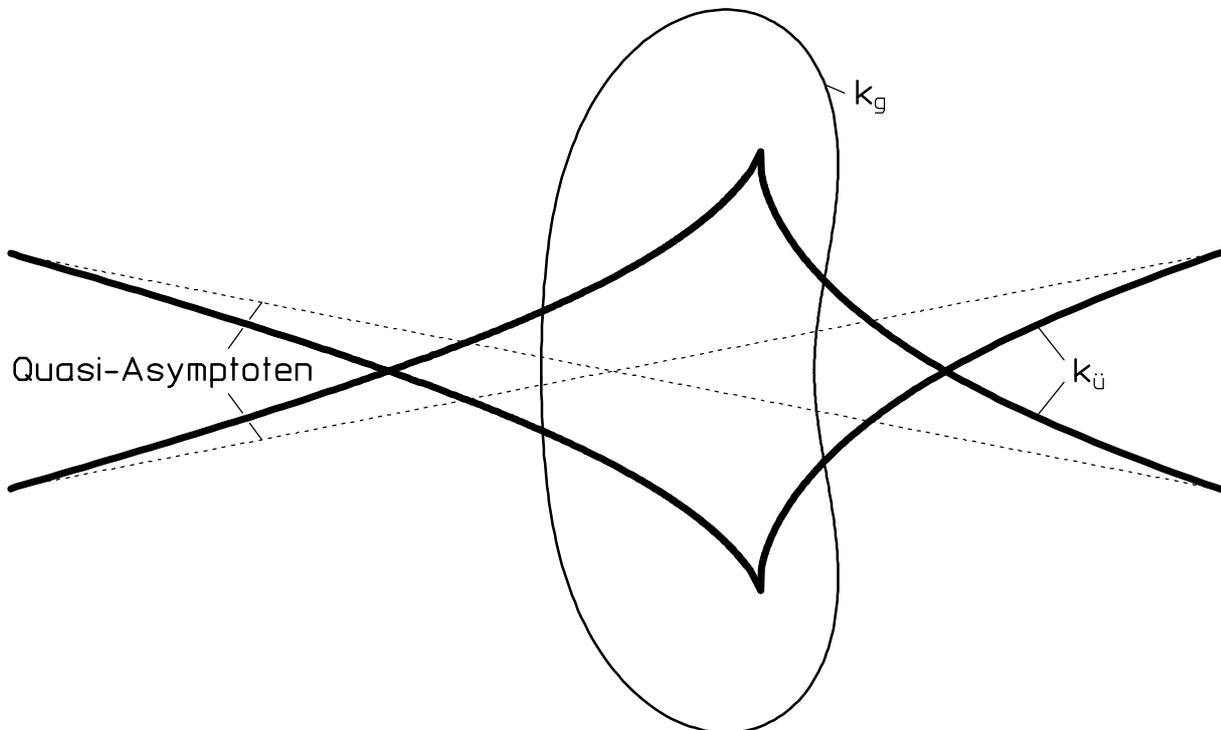


Bild 3.11: "Geschlossene" Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ mit Quasi-Asymptoten und die Gangpolkurve k_g einer durchschlagfähigen Doppelkurbel

Ein Ast der Übergangskurve kann auch zu einem Punkt entarten, der Dauer-Übergangskurvenpunkt genannt werden soll. Ein solcher Punkt durchläuft während der Bewegungsperiode des Getriebes eine Dauer-Selbstberührungskurve, da seine Bahn hin und zurück schwingend durchlaufen wird (vgl. z. B. den Punkt B und dessen Bahn k_B in Bild 2.21, S. 34). Seine Bahn muß also zwei Umkehrpunkte und somit zwei Spitzen aufweisen. Daher liegt ein Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{\ddot{u}d}$ immer im Selbstschnittpunkt der Gangpolkurve (vgl. Bild 2.7, S. 16).

⁴⁾ Die Übergangskurve wird meistens - wie auch die Gangpolkurve - als Punktefolge ermittelt. Anhand von Punktefolgen kann jedoch keine mathematisch exakte Asymptote ermittelt werden. Ersatzweise wird statt dessen die Strecke zwischen den Kurvenpunkten verwendet, die den geringsten Abstand zu den im Unendlichen liegenden Punkten der Kurve aufweisen. Diese Verbindungsgerade wird im folgenden Quasi-Asymptote genannt. Ihre Abweichung von der tatsächlichen Asymptoten hängt von der ermittelten Anzahl an Punkten der Punktefolge ab.

- 1) Ist ein Schwinggelenk vorhanden (z. B. das Gelenk B in Bild 3.12), grenzen die beiden Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden durch dieses Gelenk den potentiellen geometrischen Ort ein, in dem Doppelpunkte und somit Übergangskurvenpunkte liegen können.
- 2) Sind zwei derartige Gelenke vorhanden (z. B. die Gelenke A und B in Bild 2.24, S. 38), so wird das unter 1) geschilderte Verfahren auf jedes Gelenk separat angewandt, und es kommt für den potentiellen geometrischen Ort von Übergangskurvenpunkten nur die Schnittmenge beider einzeln ermittelter Bereiche in Frage.

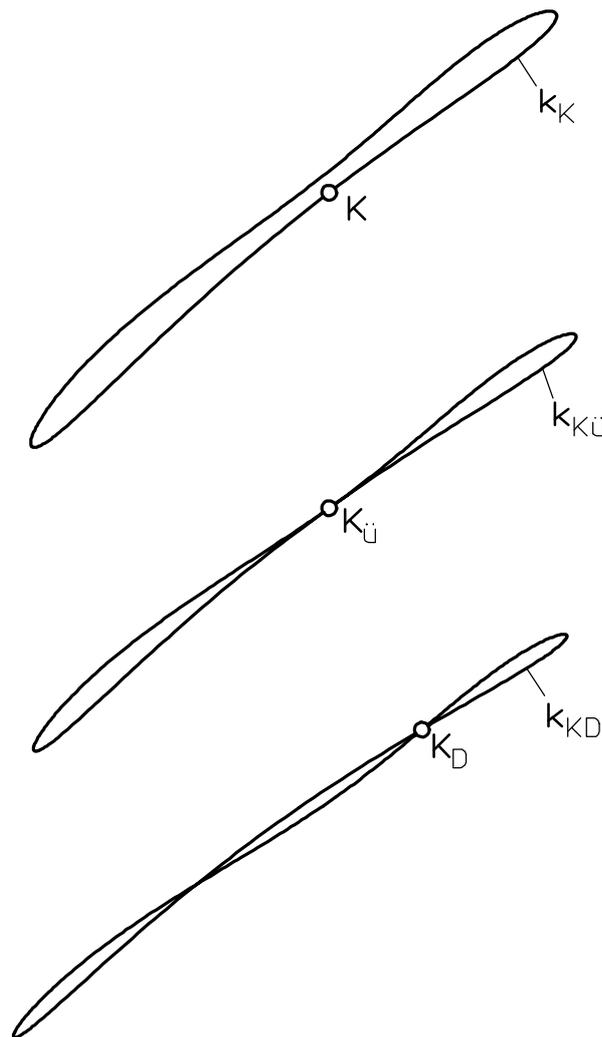


Bild 3.13: Die Bahn $k_{K_Ü}$ eines Punktes $K_Ü$ auf der Übergangskurve im Vergleich zu den Bahnen k_K und k_{K_D} von benachbarten Punkten, die auf verschiedenen Seiten der Übergangskurve liegen (vergl. Bild 2.11, S. 20)

Bild 3.13 zeigt den Einfluß der Übergangskurve, die keine Schein-Übergangskurve ist, auf die qualitative Ausprägung der Bahn eines Punktes der allgemein bewegten Ebene. Beeinflußt wird

- die Anzahl an Selbstschnittpunkten,

da die Übergangskurve ein Grenzfall eines Doppelpunktes ist.

Ein Punkt $K_{\ddot{u}}$ der Übergangskurve erzeugt immer eine Bahn $k_{K_{\ddot{u}}}$ mit einem Selbstberührungspunkt (Bild 3.13). Punkte in geringem Abstand zum Punkt $K_{\ddot{u}}$ auf unterschiedlichen Seiten der Übergangskurve erzeugen entweder eine Bahn mit zwei Selbstschnittpunkten anstelle des Selbstberührungspunktes (vgl. die Bahn k_{KD}) oder eine Bahn, die einen Doppelpunkt weniger aufweist (vgl. die Bahn k_K) als die Bahn des Punktes $K_{\ddot{u}}$.

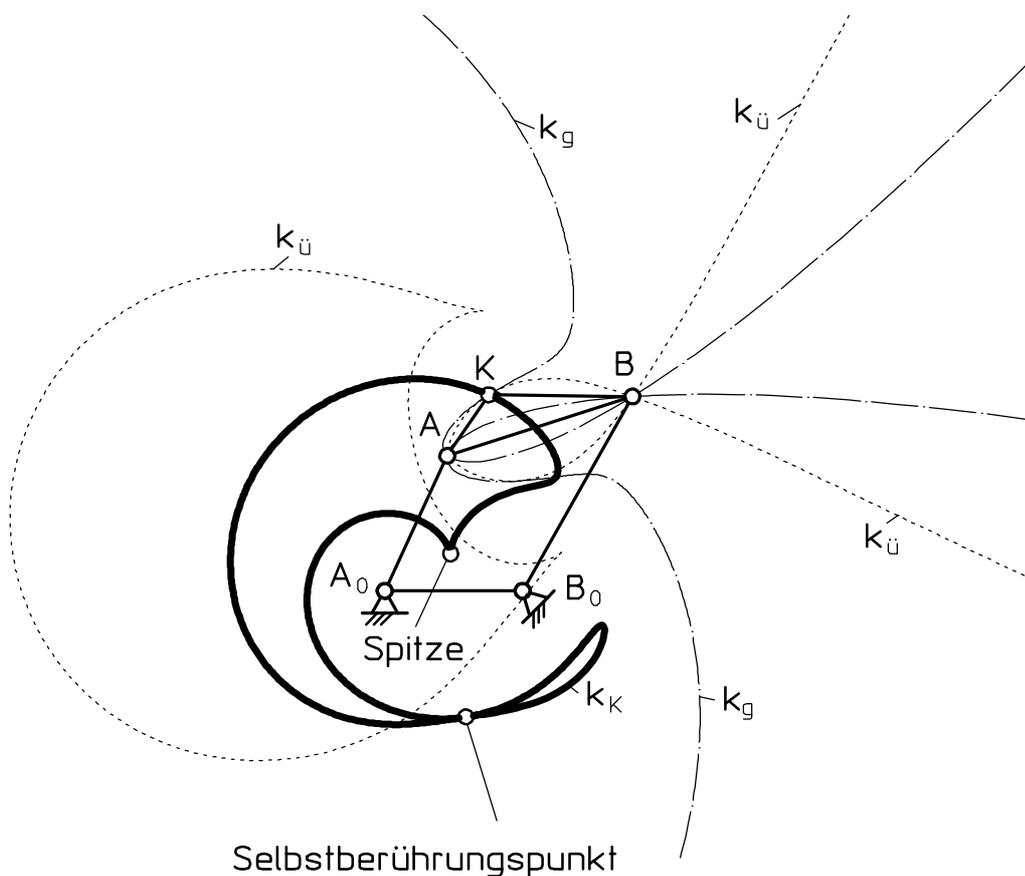


Bild 3.14: Koppelpunktbahn k_K eines Punktes K im Berührungspunkt von Gangpolkurve $k_{\ddot{u}}$ und Übergangskurve k_g

Bild 3.13 ist zu entnehmen, daß der Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ dadurch entsteht, daß die beiden „langgestreckten, fast parallele Bereiche“ im mittleren Teil der Bahn k_K sich so

weit genähert haben, das sie einander im Punkt $K_{\ddot{u}}$ tangieren. Überlappen sich die beiden „langgestreckten, fast parallele Bereiche“, entstehen statt des Selbstberührungspunktes zwei Selbstschrittpunkte (vgl. Bahn k_{KD}).

Punkte auf verschiedenen Seiten der Übergangskurve erzeugen also Bahnen, die in der Anzahl der Selbstschnittpunkte eine Differenz von 2 aufweisen. Punkte auf verschiedenen Seiten von Schein-Übergangskurven erzeugen allerdings Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten.

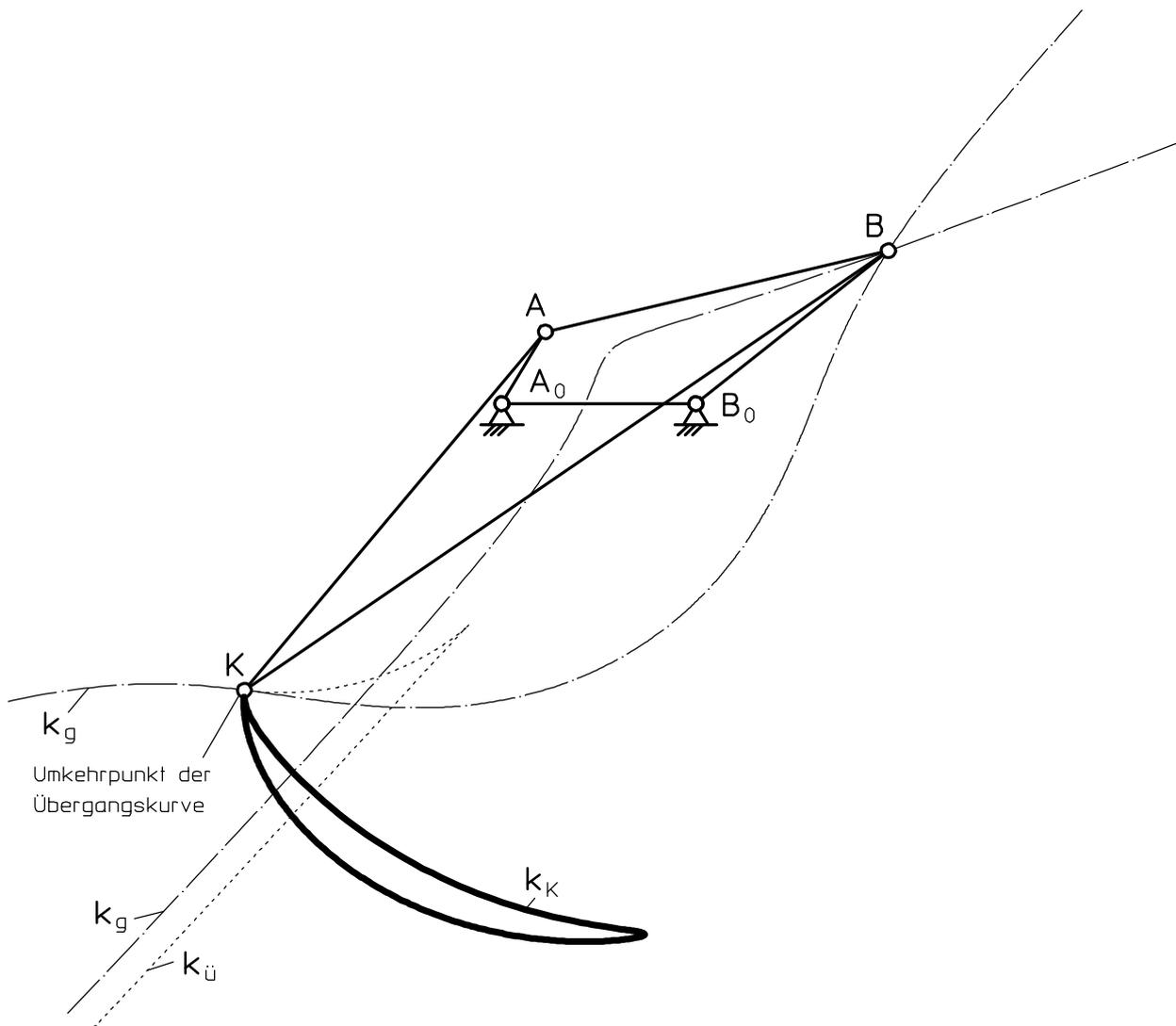


Bild 3.15: Koppelpunktbahn k_K mit Schnabelspitze (vergl. Bild 2.10)

Ein Berührungspunkt von Gangpolkurve und Übergangskurve (Bild 3.14) stellt in vielen Fällen einen Endpunkt (einen Umkehrpunkt) der Übergangskurve (Bild 3.15) dar. Liegt ein Umkehrpunkt vor, so erzeugt er eine Bahn mit einer Schnabelspitze (vgl. Abschnitt 3.4 und Bild 3.15). Im anderen Fall weist die Koppelpunktbahn k_k eine Spitze und einen Selbstberührungspunkt auf (Bild 3.14).

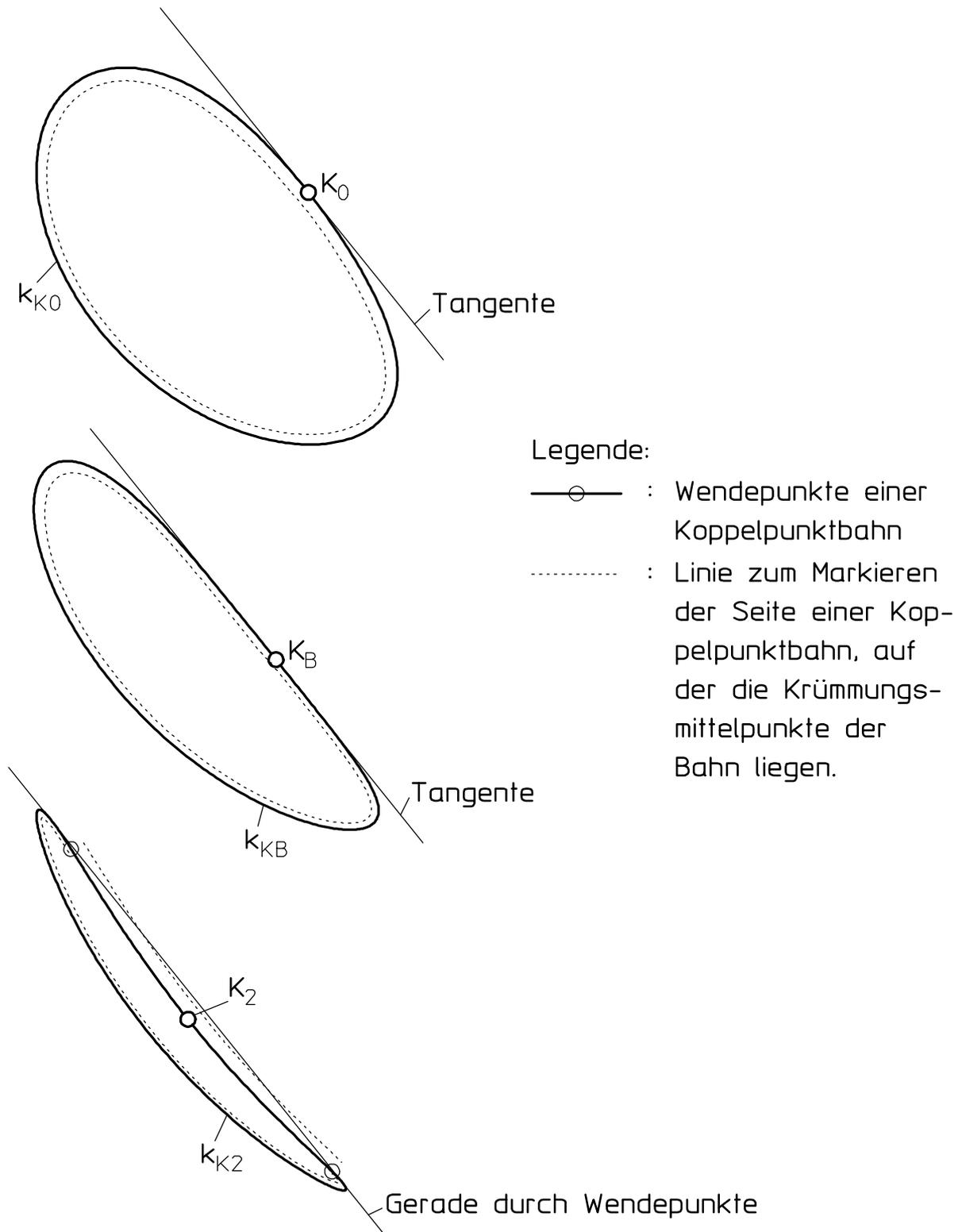


Bild 3.16: Die Bahn k_{K_B} eines Punktes K_B auf der BALLSchen Kurve im Vergleich zu den Bahnen k_{K_0} und k_{K_2} von benachbarten Punkten, die auf verschiedenen Seiten der BALLSchen Kurve liegen

3.3 Die Eigenschaften der BALLschen Kurve

Die BALLsche Kurve k_b ist die Folge derjenigen Punkte einer allgemein bewegten Ebene, die nach und nach auf einem BALLschen Punkt zu liegen kommen. BALLsche Punkte sind dabei diejenigen Punkte einer Bahn in der gestellfesten Ebene, die eine vierpunktig berührende Tangente aufweisen⁵⁾. Der Krümmungsradius einer Bahn ist somit im BALLschen Punkt unendlich groß. Daher gehen die Asymptoten von Evoluten immer durch einen BALLschen Punkt der zugrundeliegenden Bahn. Ein BALLscher Punkt wird durchlaufen, wenn der erzeugende Punkt (analog zu Bild 3.1a, S. 42) über dem zugehörigen Teil der Flachpunktkurve k_f zu liegen kommt.

Die BALLsche Kurve ist zusammen mit der Gangpolkurve die Einhüllende aller Wendekreise.

Bild 3.16 zeigt den Einfluß der BALLschen Kurve auf die qualitative Ausprägung der Bahn eines Punktes einer bewegten Ebene. Beeinflußt wird

- die Anzahl an Wendepunkten,

da der Krümmungsradius im BALLschen Punkt unendlich groß ist.

Ein Punkt K_B der BALLschen Kurve erzeugt immer eine Bahn k_{KB} mit einem BALLschen Punkt. Punkte in geringem Abstand zum Punkt K_B auf unterschiedlichen Seiten der BALLschen Kurve erzeugen entweder eine Bahn mit zwei Wendepunkten anstelle des BALLschen Punktes (vgl. die Bahn k_{k2}) oder eine Bahn ohne BALLschen Punkt und ohne zusätzliche Wendepunkte (vgl. die Bahn k_{k0}).

Ein Punkt K_0 , der die Bahn k_{K0} erzeugt, soll neben der BALLschen Kurve liegen. Die gezeigte Bahn weist keinen Wendepunkt auf, und somit liegt der Krümmungsmittelpunkt immer auf der gleichen Seite der Bahn. Diese Seite ist durch eine gepunktete Markierungslinie gekennzeichnet.

Ein Punkt K_B , der auf der BALLschen Kurve liegt, erzeugt eine Bahn, die eine genäherte Geradföhrung aufweist. Die Tangente t verdeutlicht die Richtung der genäherten Geradföhrung. Auch bei dieser Bahn wechselt der Krümmungsmittelpunkt an keiner Stelle die Seite der Bahn. Allerdings liegt er einmal - nämlich in dem durch einen 0-Kreis gekennzeichneten BALLschen Punkt - im Unendlichen.

⁵⁾ Der Krümmungsradius einer Bahn wechselt - von Sonderfällen abgesehen - im BALLschen Punkt (im Gegensatz zu Wendepunkten mit dreipunktig berührender Tangente) nicht die Seite. Die Sonderfälle, in denen der Krümmungsradius einer Bahn im BALLschen Punkt die Seite wechselt, sind diejenigen BALLschen Punkte, die eine Tangente mit ungeradzahliker Punktigkeit aufweisen, wie z. B. Punkte mit fünfpunktig berührender Tangente.

Ein Punkt K_2 , der sich auf der anderen Seite der BALLSchen Kurve als der Punkt K_0 befindet, erzeugt eine Bahn k_{K_2} , die zwei Wendepunkte mehr als die Bahn k_{K_0} aufweist. Beide Wendepunkte, an denen jeweils der Krümmungsradius von einer Seite der Bahn auf die andere wechselt, sind durch 0-Kreise markiert.

Punkte auf verschiedenen Seiten der BALLSchen Kurve erzeugen also Bahnen, die in der Anzahl an Wendepunkten eine Differenz von 2 aufweisen.

Punkte auf verschiedenen Seiten der BALLSchen Kurve und auch auf verschiedenen Seiten der Gangpolkurve erzeugen also Bahnen, die in der Anzahl an Wendepunkten eine Differenz von 2 aufweisen. Feldgrenzen, die gemeinsam von BALLScher Kurve und Gangpolkurve gebildet werden, trennen demzufolge Felder, deren Punkte Bahnen erzeugen, die in der Anzahl an Wendepunkten eine Differenz von 0 oder 4 aufweisen. Bei den vom Verfasser untersuchten Fällen trat jedoch eine Differenz von 4 nie auf.

3.4 Schnabelspitzen

Alle Punkte, die in der gleichen Getriebelage zur Übergangskurve und zur Gangpolkurve gehören und somit einen Berührungspunkt beider Kurven bilden (Bild 3.15, S. 57) - und zwar nur diese - erzeugen Schnabelspitzen [4], denn Schnabelspitzen sind Spitzen von Koppelpunktbahnen, bei denen der Krümmungsradius vor der Spitze gleich dem Krümmungsradius nach der Spitze ist. Ein Punkt, der einen Umkehrpunkt seiner Bahn durchläuft, die vor und nach dem Umkehrpunkt den gleichen Krümmungsradius aufweist und damit kurzzeitig die gleiche Bahn in umgekehrter Richtung durchheilt, stellt notwendigerweise einen Selbstberührungspunkt dar.

Schnabelspitzen - von viergliedrigen Gelenkgetrieben - weisen nach [4] eine vierpunktig berührende Tangente auf und erfüllen somit die Bedingung für einen BALLSchen Punkt. Ein Punkt, der eine Schnabelspitze erzeugt, liegt also gleichzeitig auf der Gangpolkurve, der Übergangskurve und der BALLSchen Kurve. Beim Durchfahren der Schnabelspitze liegt der Punkt gleichzeitig über der Rastpolkurve, der Selbstberührungskurve und der Flachpunktcurve.

Die Gangpolkurve und die BALLSche Kurve weisen einen schleifenden Schnitt oder eine schleifende Berührung auf, wenn für beide Kurven der Schnittpunkt oder der Berührungspunkt zur gleichen Getriebestellung gehört. Das ist so, weil die BALLSche Kurve und auch die Gangpolkurve die Einhüllenden der Wendekreise sind [4]. Da die Einhüllende im Berührungspunkt mit einem Wendekreis die gleiche Tangente wie der Wendekreis aufweist, müssen im gemeinsamen Punkt von Gangpolkurve und BALLScher Kurve auch diese beiden Kurven die gleiche Tangente aufweisen. Aus diesem Grund lassen sich Punkte, die Schnabelspitzen erzeugen, anhand der Bestimmung des Berührungspunktes bzw. des Schnittpunktes nicht exakt lokalisieren (Bild 3.17). Der am gleichen Ort befindliche Übergangskurvenpunkt, der mit der Gangpolkurve ebenfalls die gleiche Tangente aufweist (vgl. Abschnitt 3.2), läßt sich ohne Grenzfallbetrachtung gar nicht bestimmen, da in diesem Punkt beide Momentanpole und der Übergangskurvenpunkt zusammenfallen.

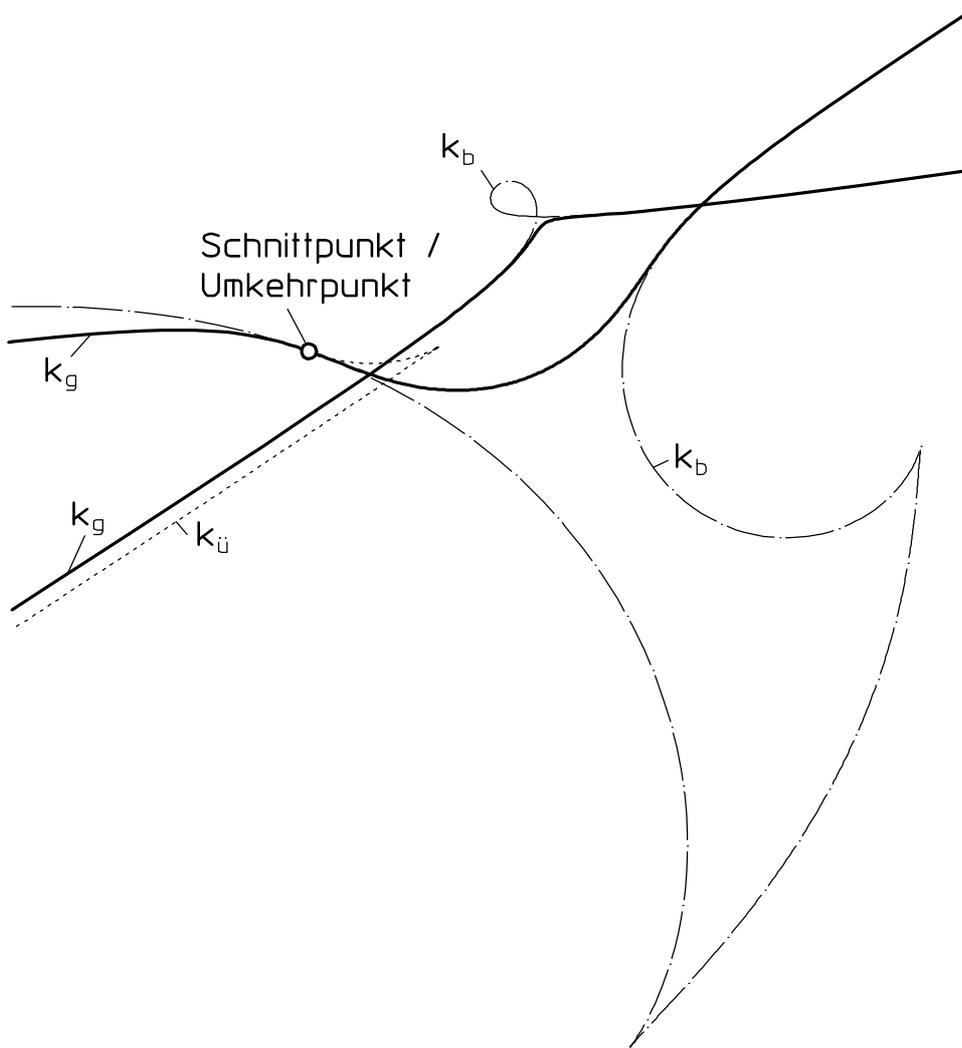


Bild 3.17: Schnittpunkt von Gangpolkurve k_g und BALLscher Kurve k_b , der gleichzeitig ein Umkehrpunkt der Übergangskurve k_u ist

Nach [4] ist die Getriebeelage, in der eine Schnabelspitze durchlaufen wird, zusätzlich dadurch gekennzeichnet, daß die Verbindungslinie $P_{20}P_{31}$ (Bild 3.18) von dem Momentanpol P_{20} und dem Schnittpunkt P_{31} zwischen Koppel und Gestell senkrecht auf dem Gestell liegt. Diese Getriebeelage ist nur numerisch zu ermitteln, z. B. mit Hilfe des in Bild 3.18 gezeigten Getriebes, bei dem ein Antrieb im Punkt P_{31} dafür sorgt, daß der Winkel $\alpha = 90^\circ$ eingenommen wird.

Wird für die gesuchte Winkellage der Winkel φ mit dem Programm SPACAR [22] bzw. KINEMA [6] mit der durch diese Programme erreichbaren Genauigkeit von $0,0005^\circ$ bestimmt, so lassen sich die aus der Theorie vorausgesagten Eigenschaften einer Schnabelspitze beim Analysieren einer entsprechenden Koppelpunktbahn numerisch oft nicht nachweisen!

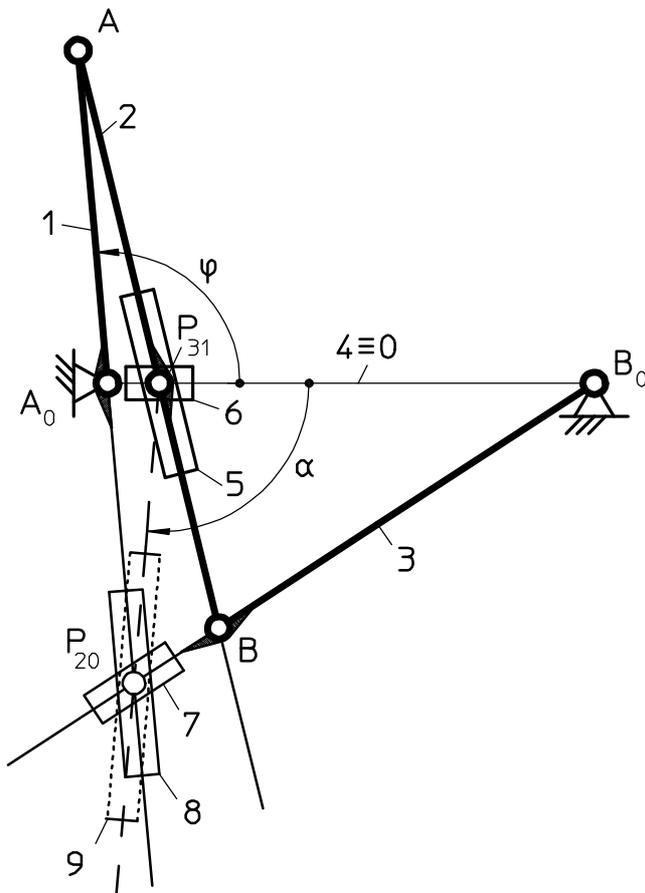


Bild 3.18: Getriebe zum Erzeugen einer Lage, in der der Koppelgelenk über dem Momentanpol P_{20} eines viergliedrigen Getriebes A_0ABB_0 eine Bahn mit einer Schnabelspitze erzeugt

Eine größere Genauigkeit beim Bestimmen eines Punktes, dessen Bahn eine Schnabelspitze durchläuft, lässt sich erreichen, wenn die Funktionen der x-Koordinate des Momentanpols P_{20} und der x-Koordinate des Schnittpunkts zwischen Gestell und Koppel - also des Hilfspols P_{31} - in Abhängigkeit von dem gleichen Parameter (z. B. dem Antriebswinkel φ) aufgestellt werden.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Hilfspols P_{31} lassen sich anhand von Bild 3.19 herleiten:

$$x_{P_{31}} = \ell_1 \cdot \cos(\varphi) + \overline{AP_{31}} \cdot \cos[\gamma(\varphi)] \quad (3.1)$$

$$(y_{P_{31}}) = 0 = \ell_1 \cdot \sin(\varphi) + \overline{AP_{31}} \cdot \sin[\gamma(\varphi)] \quad (3.2)$$

Durch Umstellen von Gleichung (3.2) nach der Strecke $\overline{AP_{31}}$ und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (3.1) folgt unter Verwendung von

$$\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \tan(\gamma) \quad (3.3)$$

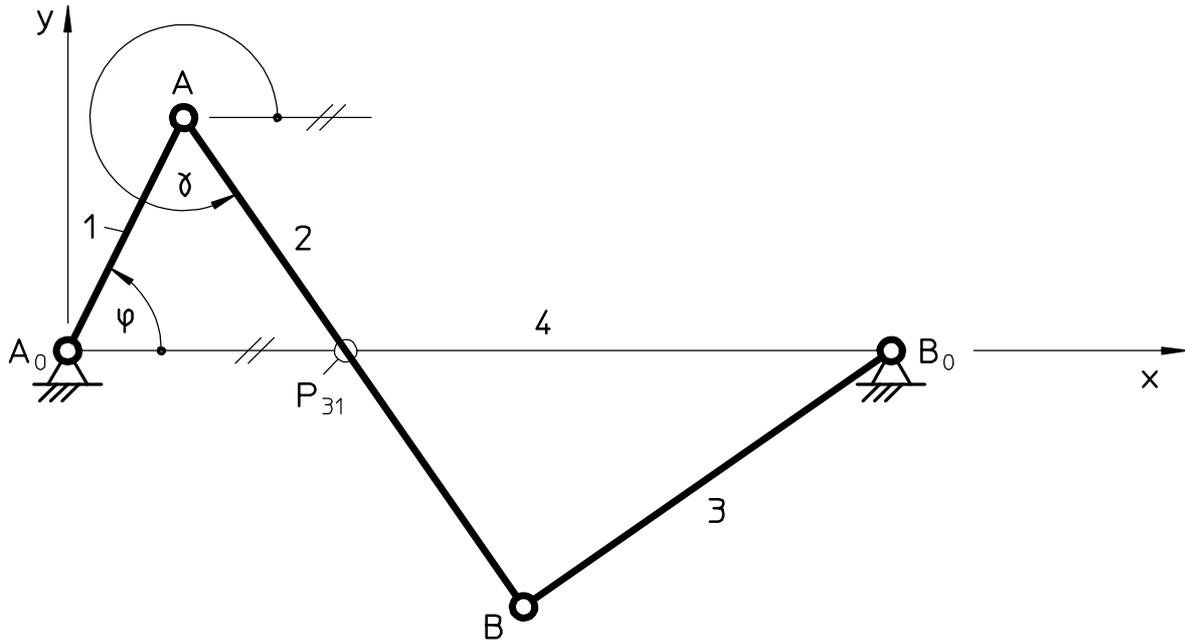


Bild 3.19: Bestimmen des Schnittpunktes P_{31} zwischen Koppel 2 und Gestell 4

$$x_{P31} = l_1 \cdot \left[\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\tan[\gamma(\varphi)]} \right] \tag{3.4}$$

Die Gleichungen für die Koordinaten des Momentanpols P_{20} lassen sich anhand von Bild 3.20 herleiten:

$$(x_{P20} =) \overline{A_0P_{20}} \cdot \cos(\varphi) = l_4 + \overline{B_0P_{20}} \cdot \cos[\psi(\varphi)] \tag{3.5}$$

$$(y_{P20} =) \overline{A_0P_{20}} \cdot \sin(\varphi) = \overline{B_0P_{20}} \cdot \sin[\psi(\varphi)] \tag{3.6}$$

Aus Gleichung (3.6) folgt durch Umstellen

$$\overline{B_0P_{20}} = \overline{A_0P_{20}} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\sin[\psi(\varphi)]} \tag{3.7}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.7) in Gleichung (3.5) erhält man

$$\overline{A_0P_{20}} \cdot \cos(\varphi) = l_4 + \overline{A_0P_{20}} \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{\cos[\psi(\varphi)]}{\sin[\psi(\varphi)]} \tag{3.8}$$

Unter Beachtung von Gleichung (3.3) folgt durch Umstellen aus Gleichung (3.8)

$$\overline{A_0P_{20}} = \frac{l_4}{\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\tan[\psi(\varphi)]}} \tag{3.9}$$

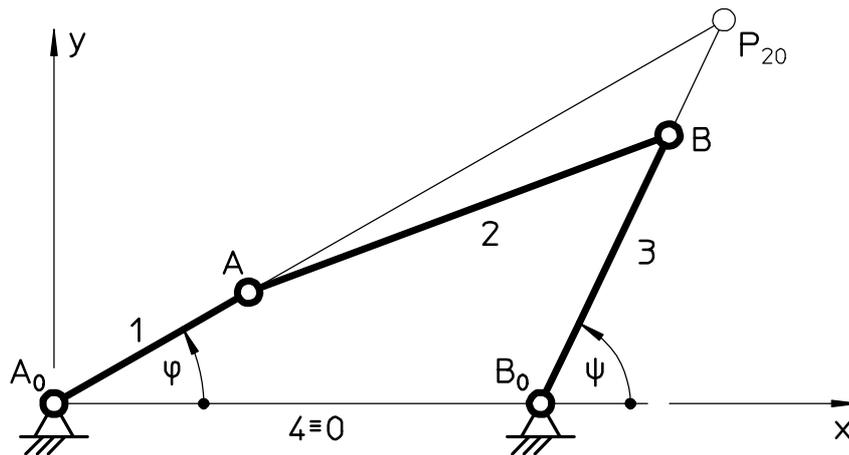


Bild 3.20: Bestimmen der Koordinaten des Momentanpols P_{20}

Aus Gleichung (3.9) folgt für die x -Koordinate des Momentanpols aus Bild 3.20:

$$\overline{A_0 P_{20}} \cdot \cos(\varphi) = x_{P_{20}} = \frac{\ell_4 \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\tan[\psi(\varphi)]}} \quad (3.10)$$

Die Bedingung, daß die Pole P_{20} und P_{31} (Bild 3.18, S. 62) auf einer Normalen zum Gestell liegen müssen, bedeutet bei einem horizontalem Gestell, daß die x -Koordinaten beider Pole identisch sein müssen. Das Gleichsetzen der Gleichungen (3.4) und (3.10) ergibt

$$0 = \ell_1 \cdot \left[\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\tan[\gamma(\varphi)]} \right] - \frac{\ell_4 \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\varphi) - \frac{\sin(\varphi)}{\tan[\psi(\varphi)]}} \quad (3.11)$$

Unter Beachtung von Gleichung (3.3) kann Gleichung (3.11) umgeformt werden zu

$$[f(\varphi) =] \quad 0 = \ell_1 \cdot \cos(\varphi) \cdot \left[1 - \frac{\tan(\varphi)}{\tan[\gamma(\varphi)]} \right] - \frac{\ell_4}{1 - \frac{\tan(\varphi)}{\tan[\psi(\varphi)]}} \quad (3.12)$$

Eine Nullstelle der Funktion $f(\varphi)$ aus Gleichung (3.12) läßt sich mit Hilfe des Näherungsverfahrens *Regula falsi* [25]

$$\varphi_3 = \varphi_1 - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot f(\varphi_1)}{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)} \quad (3.13)$$

ermitteln, wenn zwei Startwerte für entgegengesetzte Vorzeichen von $f(\varphi)$ sowie die Gleichungen

$$\psi = 2 \cdot \arctan \left[\frac{U + K_B \cdot \sqrt{T^2 + U^2 - V^2}}{V - T} \right], \quad (3.14)$$

$$\gamma = 2 \cdot \arctan \left[\frac{U + K_B \cdot \sqrt{T^2 + U^2 - W^2}}{W - T} \right] \quad (3.15)$$

aus [27] für viergliedrige Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken bekannt sind. Die Abkürzungen in den Gleichungen (3.14) und (3.15) stehen für

$$T = l_4 - l_1 \cdot \cos(\varphi), \quad (3.16)$$

$$U = l_1 \cdot \sin(\varphi), \quad (3.17)$$

$$V = \frac{l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}{2 \cdot l_3} - \frac{l_1 \cdot l_4}{l_3} \cdot \cos(\varphi), \quad (3.18)$$

$$W = \frac{l_3^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_4^2}{2 \cdot l_2} + \frac{l_1 \cdot l_4}{l_2} \cdot \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad (3.19)$$

$$K_B = +1, \quad \text{wenn das Gelenk B links vom Vektor } \overline{B_0A} \text{ bzw.} \quad (3.20)$$

$$K_B = -1, \quad \text{wenn das Gelenk B rechts vom Vektor } \overline{B_0A} \text{ liegt.}$$

Mit dem hier beschriebenen Verfahren läßt sich die Lage des Punktes, dessen Bahn eine Schnabelspitze aufweist, genügend genau bestimmen. Da in die Ermittlung der Evolute einer Bahn die ersten beiden Ableitungen der Bahn eingehen, treten jedoch teilweise in unmittelbarer Nähe der Schnabelspitze numerische Ungenauigkeiten beim Berechnen der Evolute auf.

Die Berührungspunkte von Gangpolkurve k_g und Übergangskurve $k_{\bar{u}}$ eines fünfgliedrigen Gelenkgetriebes (Bild 1.1, S. 3), dessen beide Antriebe durch einen Zahnriementrieb synchronisiert werden, sind identisch mit den Berührungspunkten von Gangpolkurve k_g und BALLscher Kurve k_b in Bild 1.2, S. 4. Diese Tatsache deutet darauf hin, daß nicht nur bei viergliedrigen Gelenkgetrieben diejenigen Punkte, die Schnabelspitzen erzeugen und die somit im Berührungspunkt von Übergangskurve und Gangpolkurve liegen, in der Schnabelspitze eine vierpunktig berührende Tangente aufweisen und daher ebenfalls auf der BALLschen Kurve liegen. Ein Beweis, ob dies für alle ebenen Bewegungen einer Ebene zutrifft, konnte bisher jedoch nicht erbracht werden. Ein Hinweis hierauf ergibt sich jedoch durch folgende Aussage (Bild 3.21): Da eine Sekante durch die Schnabelspitze (Sekante 2) immer drei Punkte mit der die Schnabelspitze aufweisenden Bahn gemein hat, muß die Tangente als Grenzfall der Sekante mindestens eine dreipunktig Berührende sein. Da der Krümmungsradius zudem vor und nach der Schnabelspitze auf der gleichen Seite der Bahn liegt, muß eine geradzahlige Punktigkeit auftreten und somit kann es sich nur um eine (mindestens) vierpunktig berührende Tangente handeln. Diese Überlegung wird durch die Tatsache unterstrichen, daß die Spitze selbst zusätzlich einen Doppelpunkt darstellt - vgl. hierzu ihre Entstehung aus Sekante 1.

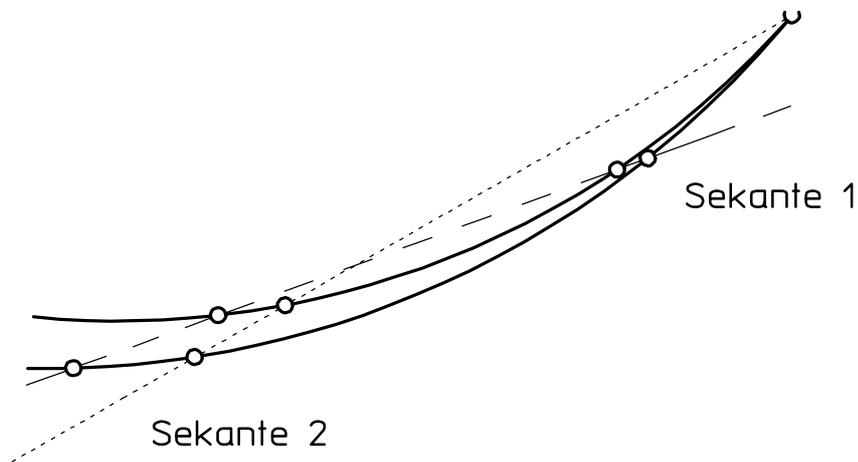


Bild 3.21: Sekanten einer Bahn mit Schnabelspitze:

- Sekante 1 besitzt 4 diskrete Schnittpunkte
- Sekante 2 besitzt 2 diskrete Schnittpunkte und einen Doppelpunkt in der Schnabelspitze

4 Die Feldeinteilung von Trochoiden erzeugenden bewegten Ebenen

Um einen Einblick zu bekommen, ob jede periodisch bewegte Ebene eingeteilt werden kann in *Felder mit Punkten zum Erzeugen qualitativ gleicher Punktbahnen*, soll zunächst die mathematisch am leichtesten zu beschreibende Getriebebauform betrachtet werden.

Die Wahl fällt hierbei auf Getriebe zum Erzeugen von Trochoiden¹⁾, die durch Abrollen eines Kreises außerhalb bzw. innerhalb eines festliegenden Kreises oder um einen solchen Kreis entstehen. Die Wahl wird deshalb getroffen, da einerseits schon viergliedrige ebene Gelenkgetriebe Probleme beim Ermitteln der Übergangskurve bereiten, andererseits aber einige Trochoiden sowohl von ebenen Gelenkgetrieben als auch von Rädergetrieben erzeugt werden können [23].

4.1 Trochoiden - Stand der Technik

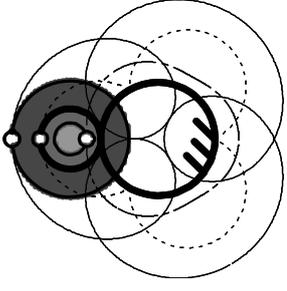
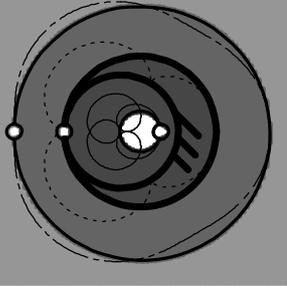
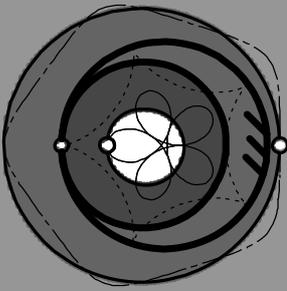
In diesem Kapitel wird das im Schrifttum vorhandene Wissen über Trochoiden beschrieben. Da sich diese Arbeit nur mit periodischen Bewegungen beschäftigt, beschränken sich die Betrachtungen auf

- das Abrollen eines Kreises **außerhalb** eines feststehenden Kreises zum Erzeugen von Epitrochoiden (Tabelle 4.1, S. 68/69),
- das Abrollen eines Kreises **um** einen feststehenden Kreis zum Erzeugen von Peritrochoiden, die wegen der doppelten Erzeugung von Trochoiden mit Epitrochoiden identisch sind und daher häufig ebenfalls als Epitrochoiden bezeichnet werden²⁾ und

¹⁾ Gemäß [20] gilt in dieser Arbeit für *Radlinien* die Gesamt-Benennung *Trochoiden*; werden diese von Wälzpunkten des abrollenden Kreises erzeugt, heißen derartige *gespitzte Trochoiden* auch *Zykloiden*.

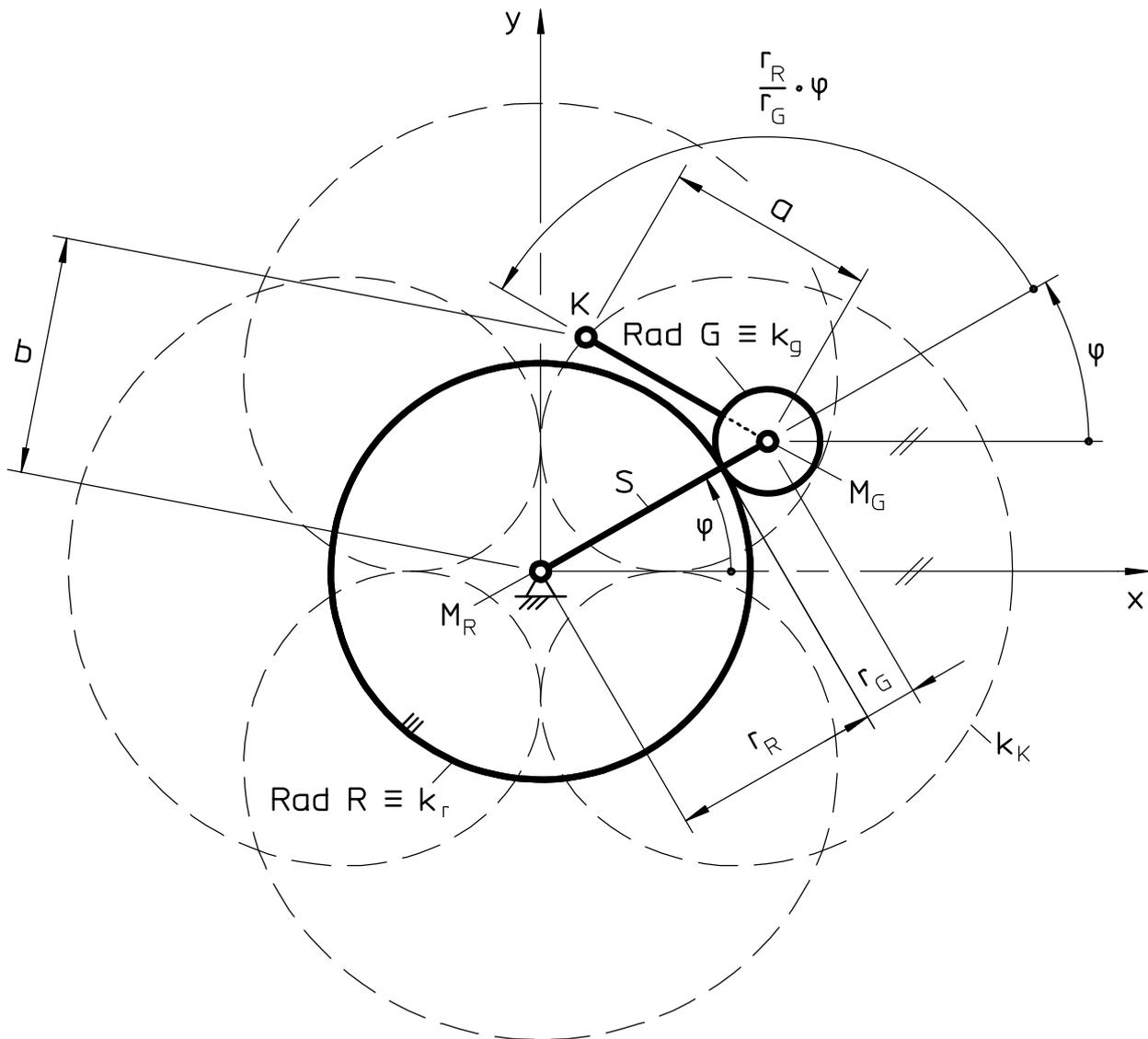
²⁾ In dieser Arbeit geht es in erster Linie um die bewegte Ebene des die Trochoide erzeugenden Rädergetriebes. Dabei muß immer unterschieden werden, ob das bewegte Rad außerhalb des feststehenden Rades oder um dieses Rad abläuft. Daher muß hier zwischen Peritrochoiden und Epitrochoiden unterschieden werden.

Tabelle 4.1: Trochoiden

Bezeichnung	Quer- verweise	Epitrochoide	Peritrochoide	Hypotrochoide	
Schematische Darstellungen ¹⁾	Bilder 4.16 bis 4.19				
¹⁾ optisch verzerrt					
Unterteilung		$ r_R / r_G \leq 2$		$ r_R / r_G \geq 2$	
$\text{sign}(r_R) = \text{sign}(i_Z)$	[24]	+1		-1	
$\text{sign}(r_G) = \text{sign}(i_N)$	[24]	+1		+1	
$i = r_R / r_G = i_Z / i_N$	[24]	0 ... +∞		-∞ ... -1	
$m = i + 1$	[24]	+1 ... +∞		-∞ ... -1	
Trochoiden-Koordinaten	([24])	$x = r_G \cdot m \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \cos(m \cdot \varphi + \gamma_0)$ $y = r_G \cdot m \cdot \sin(\varphi) + a \cdot \sin(m \cdot \varphi + \gamma_0)$			
Winkel γ_0 des Rades G in der Ausgangslage	Gl. 4.70	$\gamma_0 = -\text{sign}(i_N) \cdot i \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n_i}{i_Z} \right)$			
Anzahl $\max(n_i)$ und Nummern n_i der Übergangskreise	Gl. 4.65 Gl. 4.78	$\max(n_i) = \text{int}\left(\frac{i_Z}{2}\right)$; $0 < n_i \leq \text{int}\left(\frac{i_Z}{2}\right)$	$\max(n_i) = \text{int}\left(\frac{2 \cdot i_N + i_Z}{2}\right)$; $0 < n_i \leq \text{int}\left(\frac{2 \cdot i_N + i_Z}{2}\right)$		
Näherungsgleichung für Getriebelage $\varphi_{\ddot{u}}$ des Selbstberührungspunkts	Gl. 4.33	$\varphi_{\ddot{u}} = \varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{m \cdot \tan(m \cdot \varphi_i + \gamma_0) - \tan(\varphi_i)}{m^2 \cdot [1 + \tan^2(m \cdot \varphi_i + \gamma_0)] - 1 - \tan^2(\varphi_i)}$			
Startlösung φ_1 für Näherungsverfahren	Gl. 4.48 Gl. 4.66 Gl. 4.69 Gl. 4.73 Gl. 4.75 Gl. 4.76 Gl. 4.77	$\varphi_1 = \varphi_{\min} + \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{4}$ $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{n_i}{i_N} \right)$ $\varphi_{\max} = -\frac{n_i \cdot \pi}{i_Z} + \frac{\pi}{2}$	$\varphi_1 = \frac{\pi}{2 \cdot i_Z \cdot n_i}$	$\varphi_1 = \varphi_{\max} - \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{4}$ $\varphi_{\min} = -\frac{n_i \cdot \pi}{i_Z} + \frac{\pi}{2}$ $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{n_i}{i_N} \right)$	

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

Radius $r_{\ddot{u}}$ des Übergangskreises	$r_{\ddot{u}} = -(r_R + r_G) \cdot \frac{\cos(\varphi_{\ddot{u}})}{\cos(m \cdot \varphi_{\ddot{u}} + \gamma_0)}$ $r_{\ddot{u}} = r_G \cdot \frac{\sin(\varphi_{\ddot{u}})}{\sin(m \cdot \varphi_{\ddot{u}} + \gamma_0)}$		
		$ r_G \leq r_{\ddot{u}} \leq r_G + r_R $	$ r_G \leq r_{\ddot{u}} \leq r_G + r_R $
Grenzen für $r_{\ddot{u}}$		$ r_G + r_R \leq r_{\ddot{u}} \leq r_G $	
Radius des BALLSchen Kreises		$r_b = \frac{r_G}{m}$	
Erzeugung verkürzter Troch., <ul style="list-style-type: none"> Minimale Anzahl an Selbstschnittpunkten Lage der BALLSchen Kurve 	innerhalb der Gangpolkurve	außerhalb der Gangpolkurve	innerhalb der Gangpolkurve
	Erzeugung verlängerter Troch., <ul style="list-style-type: none"> Maximale Anzahl an Selbstschnittpunkten Lage der Übergangskurven 	außerhalb der Gangpolkurve	innerhalb der Gangpolkurve
Ersatzgetriebe	Peritrochoide	Epitrochoide	Hypotrochoide $ r_R / r_G \geq 2$
Übersetzung des Ersatzgetriebes bei der doppelt. Erzeugung von Trochoiden	$i_z' = i_z$ $i_N' = -(i_z + i_N)$		
Minimale Anzahl n_{S0} an Selbstschnittpunkten	$n_{S0} = (i_N - 1) \cdot i_z $	$n_{S0} = (i_N + i_z - 1) \cdot i_z $	$n_{S0} = (i_N - 1) \cdot i_z $
Anzahl n_S Selbstschnittpunkte zwischen Gang- und Übergangskurve	$n_S = n_{S0} + i_z $		
Anzahl n_S Selbstschnittpunkte zwischen zwei Übergangskurven n_i und n_{i+1}	$n_S = n_{S0} + [1 + 2 \min(n_i, n_{i+1})] \cdot i_z $		
Maximale Anzahl n_{Smax} an Selbstschnittpunkten	Beim Fehlen von Übergangskurven: $n_{Smax} = n_{S0} + i_z $ bei geradem Zähler i_z der Standübersetzung i: $n_{Smax} = n_{S0} + 2 \max(n_i) \cdot i_z $ bei ungeradem Zähler i_z der Standübersetzung i: $n_{Smax} = n_{S0} + [1 + 2 \cdot \max(n_i)] \cdot i_z $		
Anzahl n_b an Wendepunkten	für das Feld zwischen Gangpolkurve und BALLScher Kurve gilt: $n_b = 2 \cdot i_z $ für alle anderen Felder gilt: $n_b = 0$		



Legende: R: Zentralrad (festliegend)
 G: Planetenrad (umlaufend)
 S: Steg (umlaufend)
 K: Punkt der Ebene von G, der Trochoide k_K erzeugt

k_r : Rastpolkurve
 k_g : Gangpolkurve

Bild 4.1: Getriebe zum Erzeugen von Epitrochoiden k_K

- das Abrollen eines Kreises **innerhalb** eines feststehenden Kreises zum Erzeugen von Hypotrochoiden.

Die allgemeinen Gleichungen zum Berechnen der Koordinaten einer Trochoide (Bild 4.1) in Abhängigkeit vom Winkel φ des Steges S lauten nach [24]³⁾

³⁾ Im Gegensatz zu [24] wird in Gleichung (4.1) und (4.2) anstelle des Abstands a der Betrag des Abstands a verwendet, da aus nachfolgenden Gleichungen ggf. ein Abstand mit negativem Vorzeichen resultiert, der Abstand a zwischen dem Punkt K und dem Mittelpunkt M_G jedoch in [24] immer größer als Null ist.

$$x = r_G \cdot m \cdot \cos(\varphi) + |a| \cdot \cos(m \cdot \varphi) \quad (4.1)$$

und

$$y = r_G \cdot m \cdot \sin(\varphi) + |a| \cdot \sin(m \cdot \varphi) \quad (4.2)$$

mit der Abkürzung

$$m = \frac{r_R + r_G}{r_G} \quad (4.3)$$

für die Anzahl der Umdrehungen des umlaufenden Rades je Umrollung des feststehenden Rades und somit je Umdrehung des Steges. Die Gleichung für die Standgetriebe-Übersetzung (d. h. für den Fall eines Gestellwechsels, so daß der Steg ruht) lautet

$$i = \frac{r_R}{r_G} \quad (4.4)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.4) in Gleichung (4.3) folgt nach kurzem Umformen

$$m = i + 1 \quad (4.5)$$

bzw.

$$i = m - 1 \quad (4.6)$$

Werden r_G und r_R mit den Vorzeichen aus Tabelle 4.1 (S. 68/69) versehen, so gelten nach [24] die Gleichungen (4.1) bis (4.6) auch für Hypotrochoiden und Peritrochoiden.

Die Einteilung der bewegten Ebene des Rades G in zwei Felder ist sehr einfach, da der Wälzkreis des Rades G gleichzeitig die Gangpolkurve k_g ist [vgl. Bilder 4.1 (S. 70) und 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S. 103)]. Der Wälzkreis des Rades R ist mit der Rastpolkurve k_r identisch, deren Mittelpunkt M_R benötigt wird. Für die Feldeinteilung sind im Schrifttum folgende Hinweise vorhanden:

- Alle Punkte auf der Gangpolkurve k_g beschreiben Bahnen mit Spitzen. Es entstehen also gespitzte Trochoiden und somit Zykloiden. Sie weisen weder Wendepunkte noch BALLSche Punkte auf.
- Alle Punkte, die sich auf derselben Seite des Wälzkreises des Rades G (also der Gangpolkurve k_g) wie der Mittelpunkt M_R des Rades R befinden, erzeugen verschlungene (verlängerte) Trochoiden. Auch sie weisen weder BALLSche Punkte noch Wendepunkte auf.
- Alle Punkte, die sich auf der anderen Seite des Wälzkreises des Rades G (also der Gangpolkurve k_g) wie der Mittelpunkt M_R des Rades R befinden, erzeugen geschweifte (verkürzte) Trochoiden, also Trochoiden mit „abgerundeten Ecken“. Diese sind nach [24] die einzigen Trochoiden, die Wendepunkte bzw. BALLSche Punkte aufweisen können (aber nicht müssen).

- Nach [20] ist die Anzahl der Schlingen, Spitzen und „abgerundeten Ecken“ an der Standgetriebe-Übersetzung erkennbar. Ist sie als rationaler Bruch in der Form

$$i = \frac{i_Z}{i_N} \quad (4.7)$$

darstellbar, so handelt es sich bei der Trochoide um eine periodische Kurve:

- Der Zähler i_Z gibt an, wieviele Schlingen, Spitzen oder „abgerundete Ecken“ die Trochoide aufweist.
- Der Nenner i_N besagt, wie viele Umläufe der Steg für eine Periode der Trochoide benötigt.

Mit diesen vier Aussagen ist eine Einteilung der bewegten Ebene des Rades G für periodische Bewegungen in zwei Felder möglich, und zwar liegt das eine Feld außerhalb der Gangpolkurve, das andere innerhalb:

Das Feld, in dem sich **nicht** der Mittelpunkt M_R des Rades R befindet, weist Punkte auf,

- die Bahnen ohne Selbstschnittpunkte erzeugen, wenn $i_N = 1^4)$ [20] bzw.
- die - bei Hypotrochoiden mit dem Radienverhältnis $|r_R/r_G| \geq 2$ und bei Epitrochoiden - Bahnen mit Selbstschnittpunkten erzeugen, wenn $i_N \neq 1$ ist.

Das Feld, in dem sich der Mittelpunkt M_R des Rades R befindet, weist Punkte auf, die Bahnen mit mindestens i_Z Selbstschnittpunkten mehr als die Punkte des anderen Feldes erzeugen, da diese Bahnen zusätzlich i_Z Schlingen mit jeweils einem Selbstschnittpunkt haben

4.2 Die Übergangskurve der Trochoiden

Alle Punkte von Ebenen, die periodische Trochoiden erzeugen und auf einem zur Gangpolkurve konzentrischen Kreis liegen, erzeugen dieselbe Bahn, allerdings unter verschiedenen Winkeln. Daher sind Gangpolkurve, Übergangskurve und BALLSche Kurve konzentrische Kreise. Es ist also ausreichend, nur einen Punkt der jeweiligen Kurve zu ermitteln, wenn ein Mittelpunkt - z. B. derjenige der Gangpolkurve - bekannt ist.

⁴⁾ Nur bei Hypotrochoiden mit dem Radienverhältnis $|r_R/r_G| \geq 2$ und bei Epitrochoiden kann $i_N = 1$ werden.

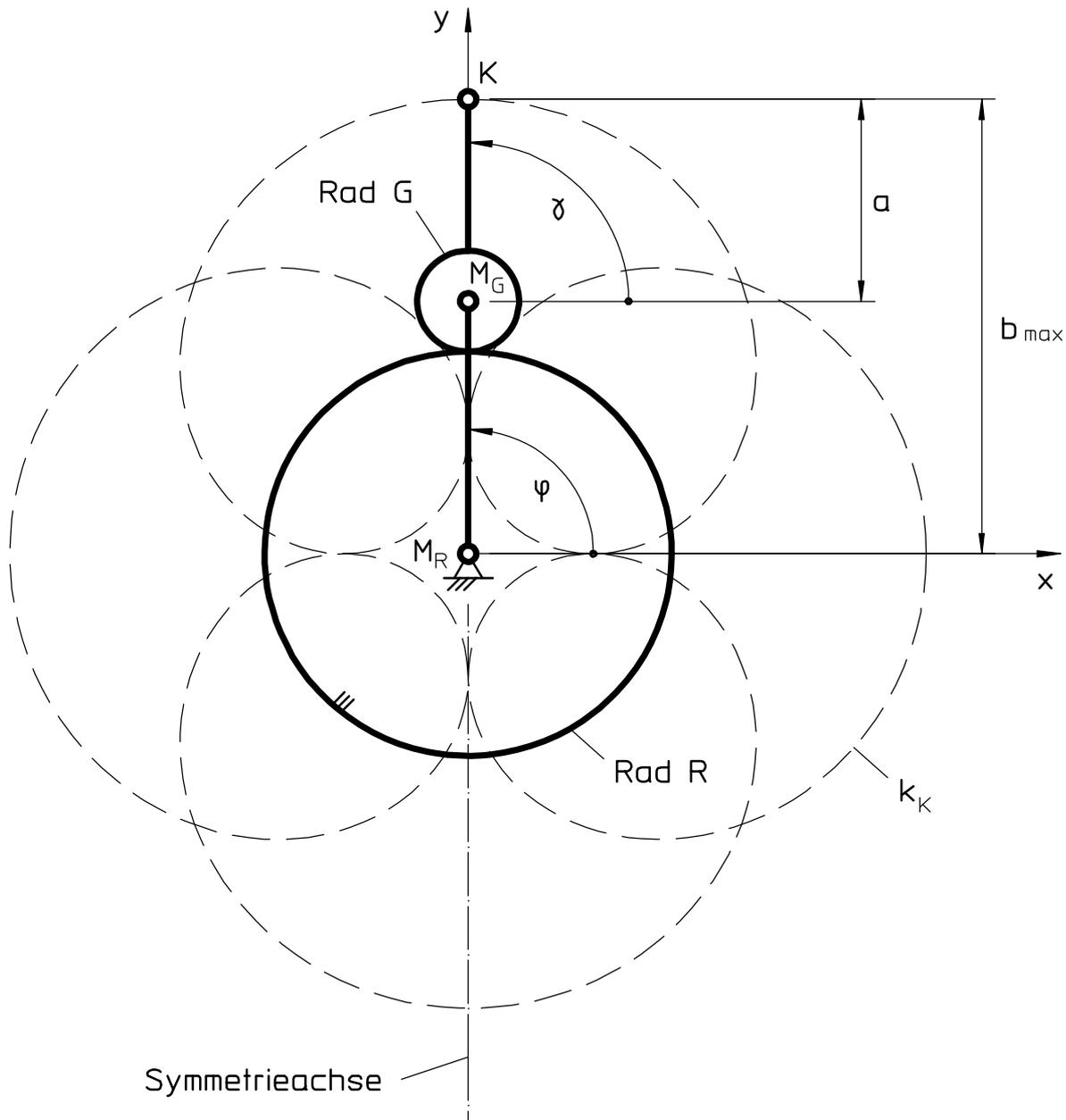


Bild 4.2: Symmetrielage eines Getriebes zum Erzeugen von Epitrochoiden k_K

4.2.1 Die Ausgangslage für das Ermitteln der Übergangskurve von Epitrochoiden

Für die Suche nach einem Algorithmus für das Ermitteln eines Punktes einer Übergangskurve, also eines Selbstberührungspunktes, ist es sinnvoll, das Getriebe in eine Lage zu drehen, die das Aufstellen der benötigten Gleichungen erleichtert.

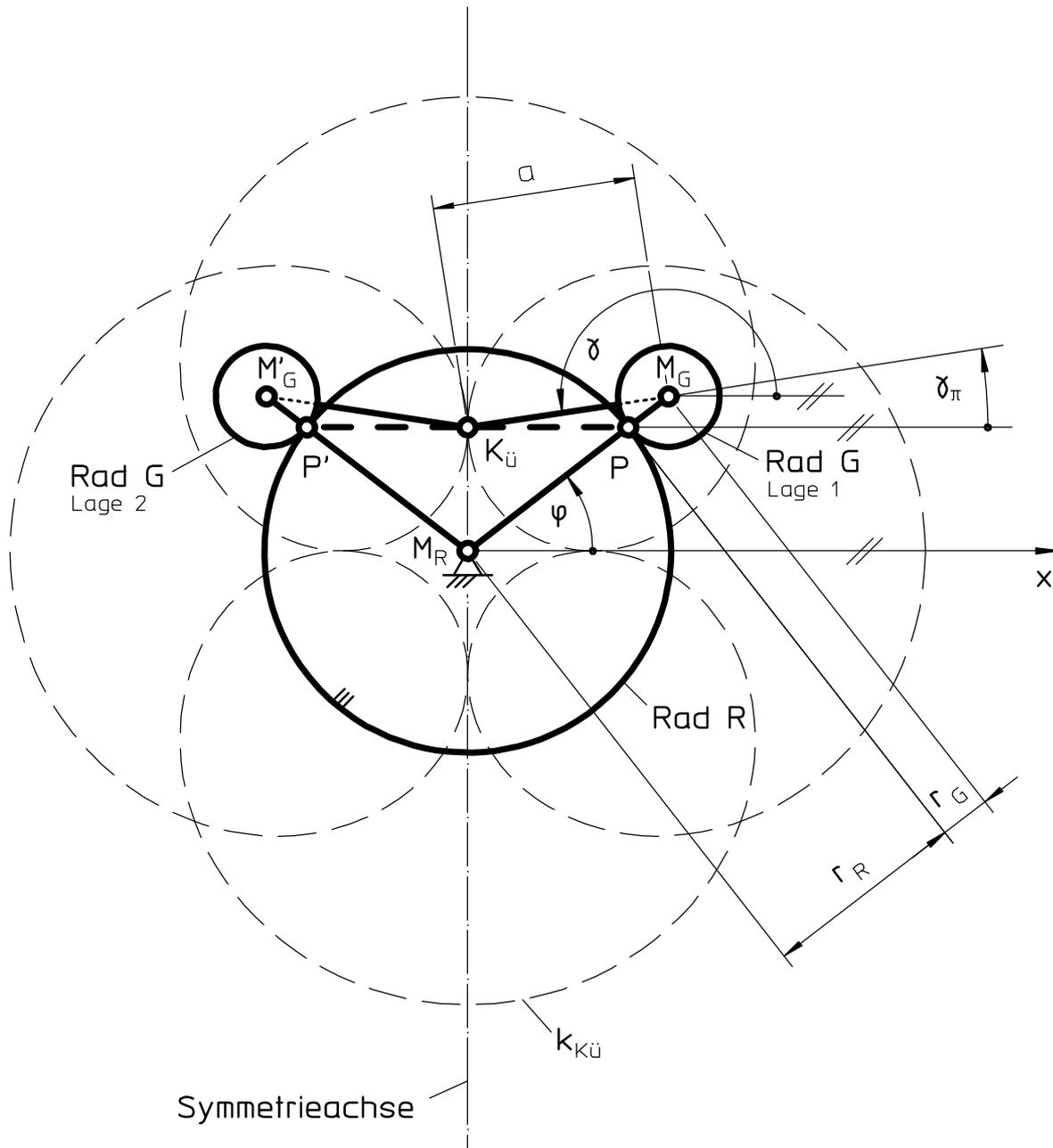


Bild 4.3: Die beiden Getriebelagen M_G und M'_G , die zu einem Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ einer Epitrochoide $k_{K_{\ddot{u}}}$ gehören

Die zu einem Selbstberührungspunkt gehörigen beiden Momentanpole liegen zusammen mit dem Selbstberührungspunkt auf einer Geraden (vgl. Abschnitt 2.1.1). Daher ist es naheliegend, eine Lage des Getriebes zu wählen, in der diese Gerade eine Waagerechte ist. Da jede periodische Trochoide eine Symmetrieachse aufweist, wird eine Lage gewählt, in der diese Symmetrieachse senkrecht steht (Bild 4.2)

Wird ein Selbstberührungspunkt $K = K_{\ddot{u}}$ gewählt, der auf der senkrechten Symmetrieachse liegt, wie Bild 4.3 anhand einer Epitrochoiden $k_{K_{\ddot{u}}}$ mit dem Radienverhältnis $r_R/r_G = 4/1$

zeigt, so liegen der Punkt $K_{\bar{u}}$ und seine beiden zu ihm gehörenden Momentanpole P und P' wie gewünscht auf einer Waagerechten.

Die Symmetrielage ist zusätzlich dadurch gekennzeichnet, daß der Abstand b (vgl. Bild 4.1, S. 70) zwischen einem Punkt der Trochoiden und dem Mittelpunkt M_R des Rades R ein Maximum (oder aber ein Minimum) einnimmt, daß also z. B. gilt

$$b = b_{\max} , \quad (4.8)$$

(Bild 4.2, S. 73) was nur zutrifft, wenn

$$\gamma = \varphi \quad (4.9)$$

ist. Der Winkel γ ist die Summe aus dem Winkel γ_0 der Ausgangslage $\varphi = 0$ und einem Anteil $\gamma_m(\varphi)$, der von dem Antriebswinkel φ abhängig ist, also

$$\gamma = \gamma_m(\varphi) + \gamma_0 . \quad (4.10)$$

Wird Gleichung (4.9) in Gleichung (4.10) eingesetzt, so folgt

$$\gamma_m(\varphi) + \gamma_0 = \varphi . \quad (4.11)$$

Es gilt

$$\gamma_m(\varphi) = m \cdot \varphi , \quad (4.12)$$

wobei die Übersetzung m nach Gleichung (4.3) berechnet wird. Gleichung (4.12) in Gleichung (4.11) eingesetzt ergibt

$$m \cdot \varphi + \gamma_0 = \varphi . \quad (4.13)$$

Es wird in Bild 4.2 (S. 73)

$$\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad (4.14)$$

gefordert. Gleichung (4.14) in Gleichung (4.13) eingesetzt, ergibt

$$\gamma_0 = (1 - m) \cdot \frac{\pi}{2} . \quad (4.15)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.6) in Gleichung (4.15) folgt für den Winkel γ in der Ausgangslage $\varphi = 0$

$$\gamma_0 = -i \cdot \frac{\pi}{2} . \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) zum Ermitteln der Koordinaten der Trochoiden müssen jetzt allerdings um den Summanden γ_0 erweitert werden zu

$$x = r_G \cdot m \cdot \cos(\varphi) + |a| \cdot \cos(m \cdot \varphi + \gamma_0) \quad (4.17)$$

$$y = r_G \cdot m \cdot \sin(\varphi) + |a| \cdot \sin(m \cdot \varphi + \gamma_0) \quad (4.18)$$

4.2.2 Ermitteln eines Selbstberührungspunktes der Epitrochoiden mit der Standgetriebe-Übersetzung $i = 4$

Wird ein Übergangspunkt von einem Koppelpunkt durchlaufen, so befinden sich der Koppelpunkt und die beiden zu dieser Lage gehörenden Momentenpole auf einer Geraden (Abschnitt 2.1.1).

Aus Bild 4.3 (S. 74) folgt für die x-Komponente der Lage des Punktes M_G

$$a \cdot \cos(\gamma_\pi) = (r_R + r_G) \cdot \cos(\varphi). \quad (4.19)$$

Durch Umstellen der Gleichung nach a folgt

$$a = (r_R + r_G) \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\gamma_\pi)}. \quad (4.20)$$

Für die y-Komponente der Lage des Punktes M_G gilt

$$a \cdot \sin(\gamma_\pi) = r_G \cdot \sin(\varphi). \quad (4.21)$$

Wird Gleichung (4.21) nach a umgestellt, so ist

$$a = r_G \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\gamma_\pi)}. \quad (4.22)$$

Das Einsetzen von Gleichung (4.22) in Gleichung (4.20) führt nach Multiplikation mit dem Nenner zu

$$r_G \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\gamma_\pi) = (r_R + r_G) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\gamma_\pi). \quad (4.23)$$

Diese Gleichung kann umgeformt werden zu

$$\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{r_R + r_G}{r_G} \cdot \frac{\sin(\gamma_\pi)}{\cos(\gamma_\pi)}. \quad (4.24)$$

Es gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha). \quad (4.25)$$

Gleichung (4.25) eingesetzt in Gleichung (4.24) ergibt

$$\tan(\varphi) = \frac{r_R + r_G}{r_G} \cdot \tan(\gamma_\pi). \quad (4.26)$$

Aus Bild 4.3 (S. 74) folgt

$$\gamma_\pi = \gamma - 180^\circ. \quad (4.27)$$

Wird Gleichung (4.27) in Gleichung (4.26) unter Beachtung von Gleichung (4.10) eingesetzt, so erhält man

$$\tan(\varphi) = \frac{r_R + r_G}{r_G} \cdot \tan \left\{ \left[\gamma_m(\varphi) + \gamma_o \right] - 180^\circ \right\} . \quad (4.28)$$

Es gilt

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha - 180^\circ) . \quad (4.29)$$

Durch Einsetzen von Gleichungen (4.12), (4.3) und (4.29) in Gleichung (4.28) folgt

$$0 = m \cdot \tan(m \cdot \varphi + \gamma_o) - \tan(\varphi) . \quad (4.30)$$

Gleichung (4.30) kann nicht nach φ umgestellt werden. Der Winkel φ lässt sich jedoch mit Hilfe des NEWTONSchen Näherungsverfahrens aus Gleichung (4.30) ermitteln. Nach [25] lautet die Gleichung für einen verbesserten Wert mit Hilfe des NEWTONSchen Näherungsverfahrens

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{f(\varphi_i)}{f'(\varphi_i)} , \quad (4.31)$$

wobei $f'(\varphi_i)$ die Ableitung von $f(\varphi_i)$ nach φ ist. Gleichung (4.30) nach φ abgeleitet ergibt:

$$0 = m^2 \cdot \left[1 + \tan^2(m \cdot \varphi_i + \gamma_o) \right] - \left[1 + \tan^2(\varphi_i) \right] . \quad (4.32)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.30) und (4.32) in Gleichung (4.31) folgt

$$\varphi_{\ddot{u}} = \varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{m \cdot \tan(m \cdot \varphi_i + \gamma_o) - \tan(\varphi_i)}{m^2 \cdot \left[1 + \tan^2(m \cdot \varphi_i + \gamma_o) \right] - 1 - \tan^2(\varphi_i)} . \quad (4.33)$$

Ist der Winkel $\varphi_{\ddot{u}}$, bei dem der Koppelpunkt $K_{\ddot{u}}$ einen Selbstberührungspunkt durchläuft, genügend genau ermittelt, so lässt sich die Übergangskurve, die ein Kreis um M_G mit dem Radius $r_{\ddot{u}} = a_{\ddot{u}}$ und somit ein Übergangskreis ist, berechnen. Aus Gleichung (4.20) folgt mit Hilfe der Gleichungen (4.27), (4.10), (4.12) und

$$-\cos(x) = \cos(x - 180^\circ) \quad (4.34)$$

$$r_{\ddot{u}} = -(r_R + r_G) \cdot \frac{\cos(\varphi_{\ddot{u}})}{\cos(m \cdot \varphi_{\ddot{u}} + \gamma_o)} . \quad (4.35)$$

bzw. aus Gleichung (4.21) für $\varphi_{\ddot{u}} \neq 0$ mit

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - 180^\circ) \quad (4.36)$$

$$r_{\ddot{u}} = r_G \cdot \frac{\sin(\varphi_{\ddot{u}})}{\sin(m \cdot \varphi_{\ddot{u}} + \gamma_o)} . \quad (4.37)$$

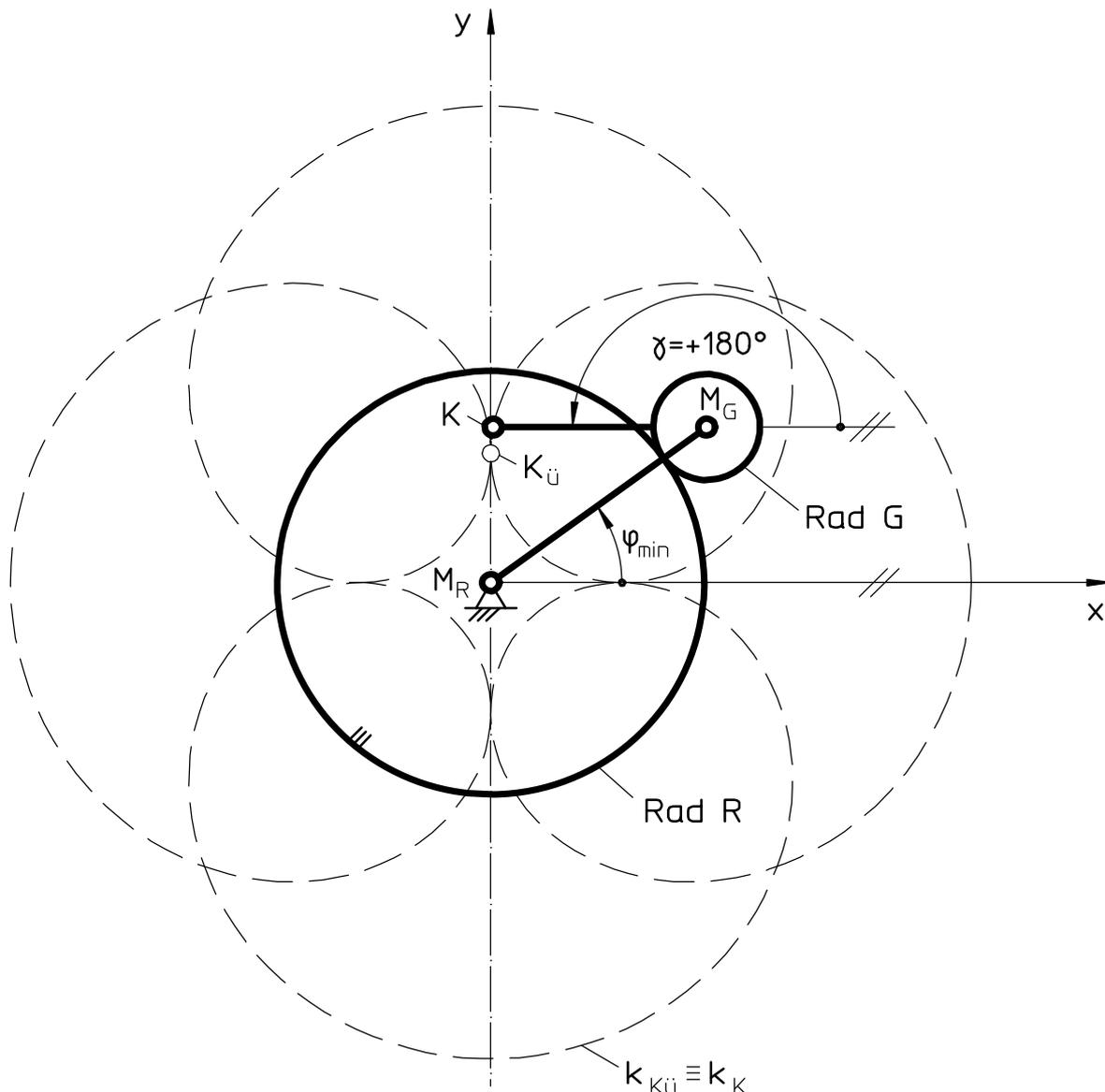


Bild 4.4: Getriebe zum Erzeugen einer Epitrochoide $k_{K\ddot{u}}$
in der Lage $\varphi = \varphi_{\min}$

4.2.2.1 Suche nach einer Ausgangslösung für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes

In Bild 4.4 befinden sich der Punkt K und der Mittelpunkt M_G des Rades G auf einer Waagerechten. Diese Lage wird auf jeden Fall erreicht, bevor der Punkt K den Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ durchläuft. Der Winkel φ aus Bild 4.3 (S. 74) ist demnach immer grö-

ßer als der Winkel φ_{\min} aus Bild 4.4, der damit die untere Grenze des Winkels φ darstellt⁵⁾.

Aus Bild 4.4 folgt auf den ersten Blick für $\varphi = \varphi_{\min}$

$$\gamma = 180^\circ = \pi . \quad (4.38)$$

Da aber φ_{\min} vor $\varphi = 90^\circ$ in Bild 4.2 (S. 73) durchlaufen wird, muß die in Bild 4.4 gezeigte Lage eine Umdrehung des Rades G vorher - also $360^\circ = 2\pi$ vorher - durchlaufen werden, damit die Bedingung $\gamma < 90^\circ$ erfüllt wird. Aus $\gamma = \pi - 2\pi$ folgt

$$\gamma = -\pi . \quad (4.39)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.10) in Gleichung (4.39) folgt

$$\gamma_0 + \gamma_m(\varphi) = -\pi . \quad (4.40)$$

Wird in dieser Gleichung $\gamma_m(\varphi)$ durch Gleichung (4.12) ersetzt, so erhält man

$$\gamma_0 + m \cdot \varphi = -\pi . \quad (4.41)$$

Mit $\varphi = \varphi_{\min}$ folgt nach geringem Umstellen unter Berücksichtigung von Gleichung (4.16)

$$\varphi_{\min} = \left(\frac{i}{2} - 1 \right) \cdot \frac{\pi}{m} . \quad (4.42)$$

In Bild 4.5 befinden sich die Gerade $M_R M_G$ und die Gerade $M_G K$ in einer Decklage. Diese Lage wird auf jeden Fall erreicht, nachdem der Punkt K den Selbstberührungspunkt $K_{\bar{u}}$ durchlaufen hat. Der Winkel φ aus Bild 4.3 (S. 74) ist demnach immer kleiner als der Winkel φ_{\max} in Bild 4.5, der somit die ober Grenze des Winkels φ darstellt.

Aus Bild 4.5 folgt für $\varphi = \varphi_{\max}$ auf den ersten Blick

$$\gamma = \varphi_{\max} + 180^\circ . \quad (4.43)$$

Da aber auch φ_{\max} vor $\varphi = 90^\circ$ (vgl. Bild 4.2, S. 73) durchlaufen wird, muß hier ebenfalls $360^\circ = 2\pi$ subtrahiert werden, damit $\gamma < 90^\circ$ ist. Aus $\gamma = \varphi_{\max} + \pi - 2\pi$ folgt

$$\gamma = \varphi_{\max} - \pi . \quad (4.44)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.10) in Gleichung (4.44) folgt unter Beachtung von Gleichung (4.12) für $\varphi = \varphi_{\max}$

$$\gamma_0 + m \cdot \varphi_{\max} = \varphi_{\max} - \pi . \quad (4.45)$$

Durch Umstellen nach φ_{\max} erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.6) und (4.16)

⁵⁾ Der Winkel φ wird hier in dem Intervall $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ definiert.

$$\varphi_{\max} = -\frac{\pi}{i} + \frac{\pi}{2} . \quad (4.46)$$

Eine sinnvolle Ausgangslösung wäre somit das arithmetische Mittel von φ_{\min} und, φ_{\max} also

$$\varphi_1 = \varphi_{\min} + \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2} . \quad (4.47)$$

Da aber empirische Untersuchungen des Verfassers gezeigt haben, daß φ in der Regel näher an φ_{\min} liegt, ist die Gleichung

$$\varphi_1 = \varphi_{\min} + \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{4} \quad (4.48)$$

zu bevorzugen.

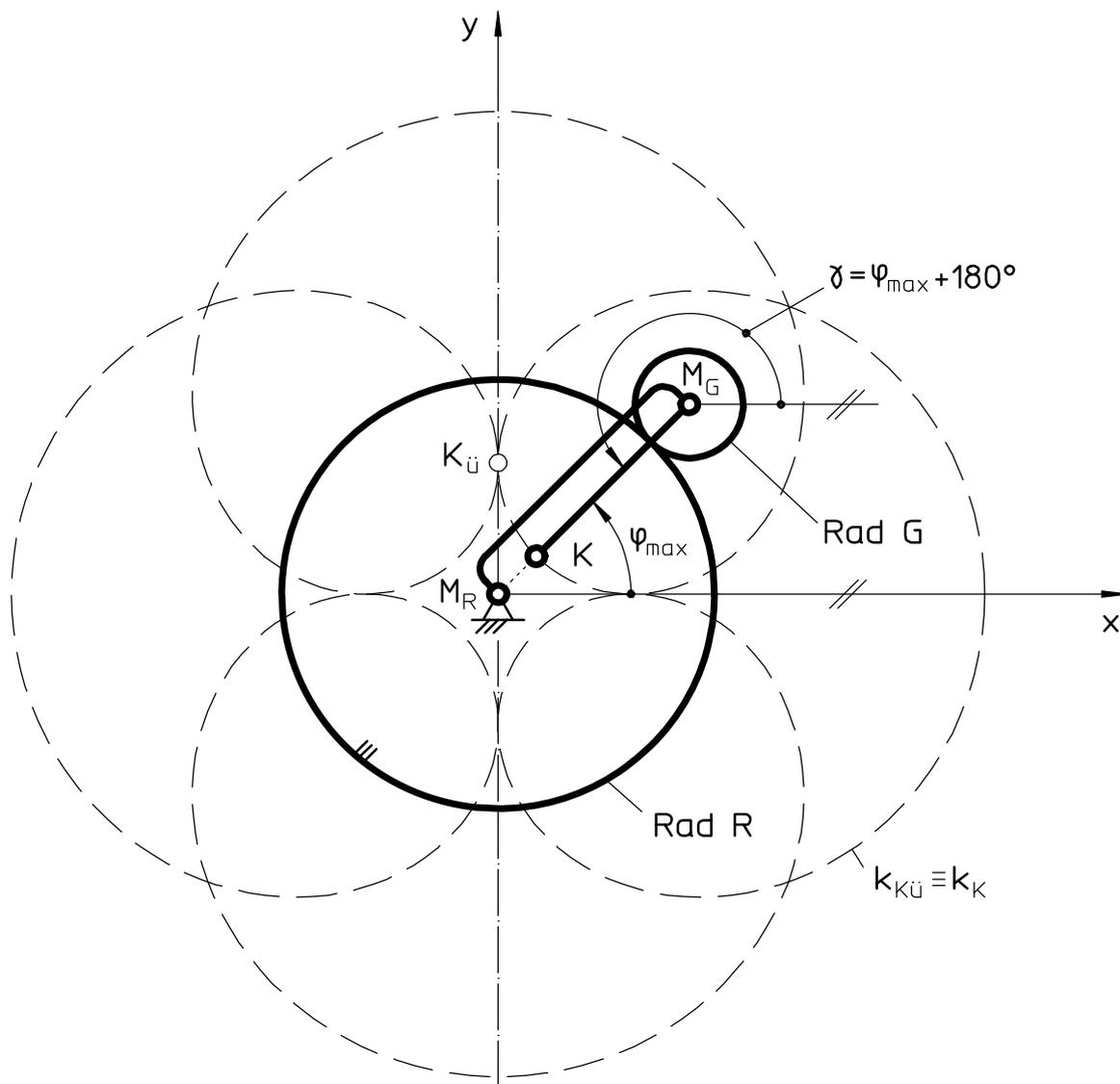


Bild 4.5: Getriebe zum Erzeugen einer Epitrochoide $k_{K\ddot{u}}$ in der Lage $\varphi = \varphi_{\max}$

4.2.3 Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von Epitrochoiden mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung

Ist $i = r_R/r_G$ größer als 3, so gibt es mehrere Übergangskurven. Beim Betrachten des Bildes 4.4 (S. 78) wird ersichtlich, daß die Gerade $\overline{KM_G}$ auch immer dann waagrecht ist, wenn Gleichung (4.39) ergänzt wird um den ganzzahligen Faktor n_i zu

$$\gamma = -n_i \cdot \pi . \quad (4.49)$$

Unter Beachtung von Gleichung (4.49) wird aus Gleichung (4.42)

$$\varphi_{\min} = \left(\frac{i}{2} - n_i \right) \cdot \frac{\pi}{m} . \quad (4.50)$$

Aus Bild 4.5 (S. 80) geht des weiteren hervor, daß auch immer dann die Gerade $\overline{KM_G}$ auf $\overline{M_R M_G}$ zu liegen kommt, wenn Gleichung (4.44) zu

$$\gamma = \varphi_{\max} - n_i \cdot \pi \quad (4.51)$$

ergänzt wird. Wird in der Herleitung von Gleichung (4.46) Gl. (4.51) statt Gl. (4.44) verwendet, so folgt

$$\varphi_{\max} = -\frac{n_i \cdot \pi}{i} + \frac{\pi}{2} . \quad (4.52)$$

Gleichung (4.52) gilt für

$$0 \leq \varphi_{\max} < \frac{\pi}{2} . \quad (4.53)$$

($\varphi = \varphi_{\max} = 90^\circ = \pi/2$ stellt einen Sonderfall dar. Die Momentanpole P und P' nach Bild 4.3 (S. 74) fallen zusammen. Es handelt sich also um einen singulären Punkt der Übergangskurve, der mit einem Punkt der Gangpolkurve identisch ist und somit nach [2] keinen realen Übergangskurvenpunkt darstellt, da kein Selbstberührungspunkt vorliegt.)

Für die untere Grenze von n_i folgt durch Einsetzen von Gleichung (4.52) in den rechten Teil der Ungleichung (4.53)

$$-\frac{n_i \cdot \pi}{i} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} , \quad (4.54)$$

woraus für die Nummern n_i der bei einem Trochoiden erzeugenden Getriebe existierenden Übergangskreise folgt

$$n_i > 0 . \quad (4.55)$$

Zum Berechnen der oberen Grenze von n_i wird die Gleichung (4.52) in den linken Teil der Ungleichung (4.53) eingesetzt. Somit ist

$$0 \leq -\frac{n_i \cdot \pi}{i} + \frac{\pi}{2} . \quad (4.56)$$

Durch Umstellen nach n_i folgt

$$n_i \leq \frac{i}{2} . \quad (4.57)$$

Aus den Ungleichungen (4.55) und (4.57) folgt für die Nummern n_i der existierenden Übergangskurven von Getrieben mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung i zur Erzeugung von Epitrochoiden:

$$0 < n_i \leq \text{int}\left(\frac{i}{2}\right) . \quad (4.58)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.35) läßt sich nun der Radius $a_{\bar{u}} = r_{\bar{u}}$ des Übergangskreises einer Epitrochoide mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung berechnen. Hierbei ist φ mit Hilfe des NEWTONSchen Näherungsverfahrens anhand der Gleichungen (4.33), (4.16) und (4.3) zu ermitteln, wobei für den Startwert von φ_i die Gleichung (4.48) unter Beachtung der Gleichungen (4.52) und (4.50) zu verwenden ist.

4.2.4 Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von periodischen Epitrochoiden

Ist ein Algorithmus zum Berechnen der Übergangspunkte von Epitrochoiden aufzustellen, die von Radpaaren mit einer rationalen Zahl für die Standgetriebe-Übersetzung i erzeugt werden, so ist u. a. Gleichung (4.33) zu modifizieren.

In Bild 4.6 ist die Standgetriebe-Übersetzung

$$i = -\frac{i_Z}{i_N} = -\frac{7}{2} . \quad (4.59)$$

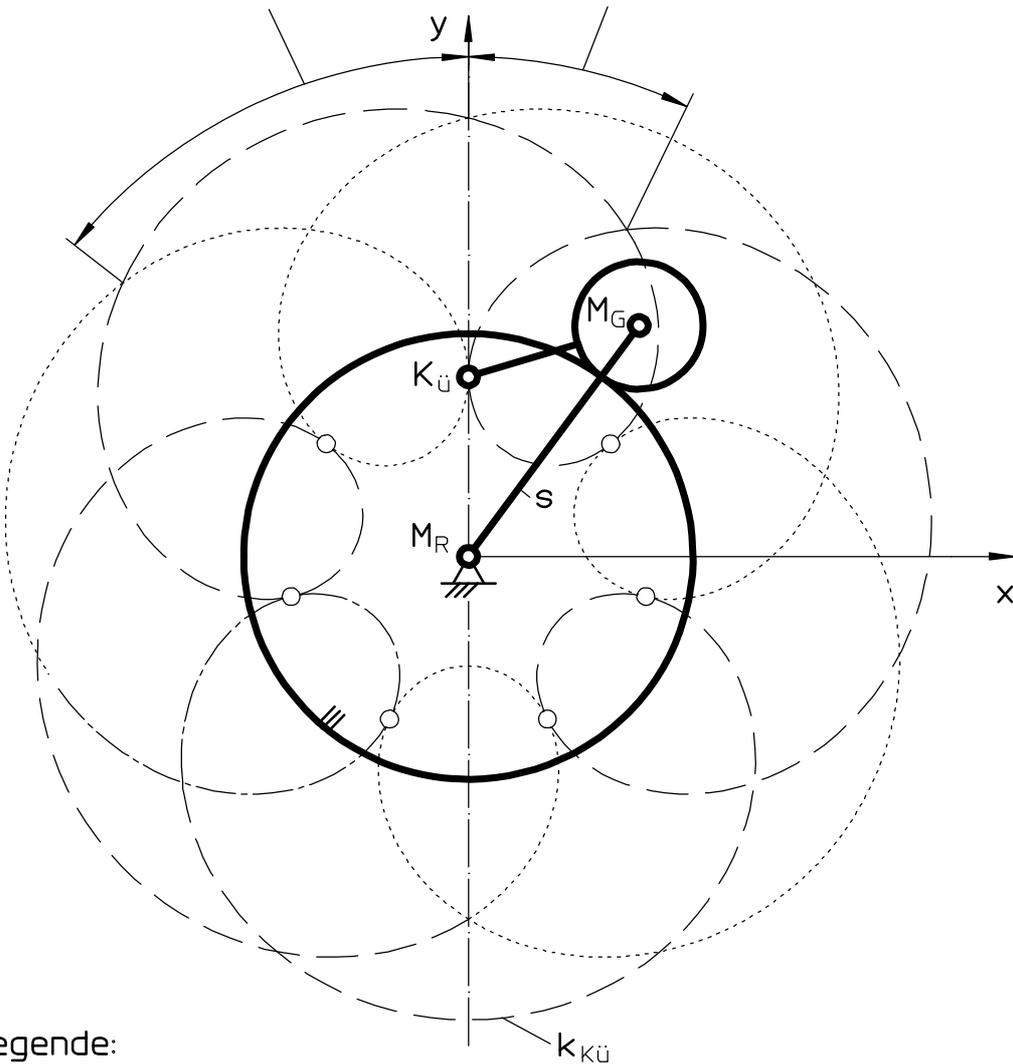
Das zugrunde liegende Rädergetriebe erzeugt also bei zwei Umdrehungen des Steges s sieben Schlingen (bzw. Spitzen oder „abgerundete Ecken“). Die Epitrochoide ist in Bild 4.6 in drei verschiedenen Linientypen dargestellt, um leichter erkennbar zu machen, daß benachbarte Schlingen zu unterschiedlichen Umdrehungen des Steges gehören.

Während in Bild 4.6 jeweils zwei benachbarte Schlingen (die aber nicht nacheinander durchlaufen werden) einen Selbstberührungspunkt bilden, zeigt Bild 4.7 (S. 84) Selbstberührungspunkt von nacheinander durchlaufenen Schlingen, zwischen denen sich noch eine weitere Schlinge befindet, die jedoch zu einer anderen Umdrehung des Steges ge-

hört. In Bild 4.8 (S. 85) liegen die Selbstberührungspunkte zwischen Schlingen, die weder benachbart sind noch nacheinander durchlaufen werden.

Die Epitrochoide in Bild 4.6 ist gegenüber der Epitrochoide in Bild 4.7 um

$$\frac{2\pi}{i_z} = \frac{360^\circ}{\text{Anzahl an Schlingen}} \qquad \frac{360^\circ}{\text{zweifache Anzahl an Schlingen}} = \frac{\pi}{i_z}$$



Legende:
 ○ : Selbstberührungspunkte

Bild 4.6: Epitrochoide $k_{Kü}$ mit Selbstberührungspunkten zwischen benachbarten, aber nicht nacheinander durchlaufenen Schlingen

(Die nacheinander durchlaufenen Schlingen der Epitrochoide sind durch den gleichen Linientyp hervorgehoben. Der für die Epitrochoide verwendete Linientyp wechselt willkürlich an drei verschiedenen Stellen.)

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

$$\frac{360^\circ}{\text{zweifache Anzahl an Schlingen}} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot i_Z} = \frac{\pi}{i_Z} \quad (4.60)$$

gedreht. Dasselbe gilt für die Darstellungen in Bild 4.8 und Bild 4.7. Gleichung (4.9) muß also für rationale Standgetriebe-Übersetzungen durch

$$\gamma = \varphi - n_T \cdot \frac{\pi}{i_Z} \quad (4.61)$$

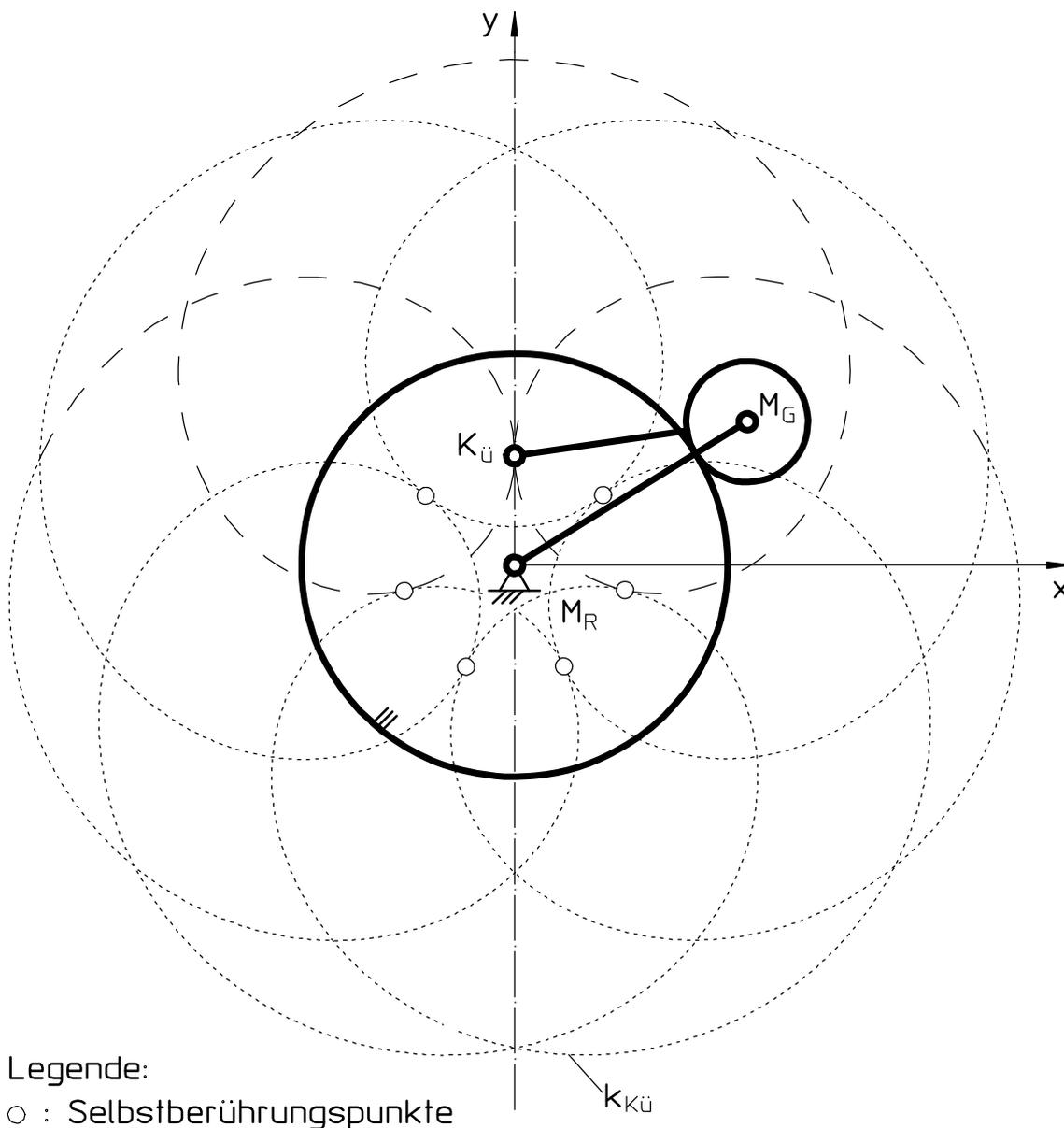


Bild 4.7: Epitrochoide $k_{Kü}$ mit Selbstberührungspunkten von nacheinander durchlaufenen Schlingen (von denen zwei durch den Linientyp — — — hervorgehoben sind)

$$m \cdot \left(\varphi - n_T \cdot \frac{\pi}{i_Z} \right) + \gamma_0 = \varphi - n_T \cdot \frac{\pi}{i_Z} . \quad (4.62)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.14) erhält man

$$\gamma_0 = (1 - m) \left(\frac{\pi}{2} - n_T \cdot \frac{\pi}{i_Z} \right) . \quad (4.63)$$

Zur Vereinfachung wird in Gleichung (4.63) Gleichung (4.6) eingesetzt. Hieraus folgt

$$\gamma_0 = -i \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n_T}{i_Z} \right) \quad (\text{mit } n_T = n_i, \text{ s. u.}). \quad (4.64)$$

Wird die Gleichung (4.64) beim Ermitteln von $\varphi_{\bar{u}}$ in Gleichung (4.33) eingesetzt, so gilt Gleichung (4.33) nicht nur für Epitrochoiden mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung, sondern auch für Epitrochoiden mit rationaler Standgetriebe-Übersetzung und damit für alle periodischen Epitrochoiden.

Da bei Epitrochoiden erzeugenden, ganzzahlig übersetzenden Getrieben die Anzahl an Schlingen, Spitzen bzw. „abgerundeten Ecken“ gleich der Standgetriebe-Übersetzung i ist [vgl. Gleichung (4.7)], allgemein bei periodischen Epitrochoiden jedoch der Koeffizient i_Z die Anzahl an Schlingen, Spitzen bzw. „abgerundeten Ecken“ wiedergibt, ist hier in der Ungleichung (4.58) statt der Standgetriebe-Übersetzung i der Koeffizient i_Z zu verwenden, woraus folgt

$$0 < n_i \leq \text{int} \left(\frac{i_Z}{2} \right) . \quad (4.65)$$

Die Begründung hierfür ist folgende: Der größte Wert von n_i ist die Anzahl an Symmetrieachsen in einem Quadranten (siehe Bild 4.9). Das ist so, weil der Antriebswinkel φ des Steges in der hier aufgeführten Herleitung immer größer oder gleich 0° und kleiner als 90° ist und jede Symmetrieachse in dem dabei aufgespannten Segment nach einer Rotation des Koordinatensystems um $[n_i \cdot (\pi / i_Z)]$ ein geometrischer Ort für einen Selbstberührungspunkt $K_{\bar{u}}$ ist, da sie nun die geforderte Senkrechte darstellt.

In Gleichung (4.52) zum Berechnen von φ_{\max} muß der Koeffizient i , der bei Epitrochoiden mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung gleich der Anzahl an Schlingen, Spitzen bzw. „abgerundeten Ecken“ ist, durch den Koeffizienten i_Z mit der gleichen Aussage bei Epitrochoiden mit rationaler Standgetriebe-Übersetzung ersetzt werden. Somit folgt für die obere Grenze von φ :

$$\varphi_{\max} = - \frac{n_i \cdot \pi}{i_Z} + \frac{\pi}{2} . \quad (4.66)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.64) in Gleichung (4.41) folgt für die untere Grenze von φ :

$$\varphi_{\min} = \left(\frac{i}{m} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{n_T}{i_Z} \right] - \frac{1}{m} \right) \cdot \pi . \tag{4.67}$$

Gleichung (4.67) läßt sich unter Beachtung von Gleichung (4.7) umstellen auf

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{n_T - i_N}{i_N} \right) . \tag{4.68}$$

Nun muß noch der Koeffizient n_T in Gleichung (4.64) bestimmt werden. Die Mathematik liefert jedoch keine eindeutige Zuordnung erlaubter Werte des Koeffizienten n_T zu Werten des Koeffizienten n_i in den Gleichungen (4.52) und (4.50) , wobei n_i für die Anzahl an halben Umdrehungen des umlaufenden Rades G und n_T für die Anzahl der Koordinatensystem-Rotationen (s. o.) steht, sondern für jede Lage gibt es verschiedene Kombinationen von n_i und n_T .

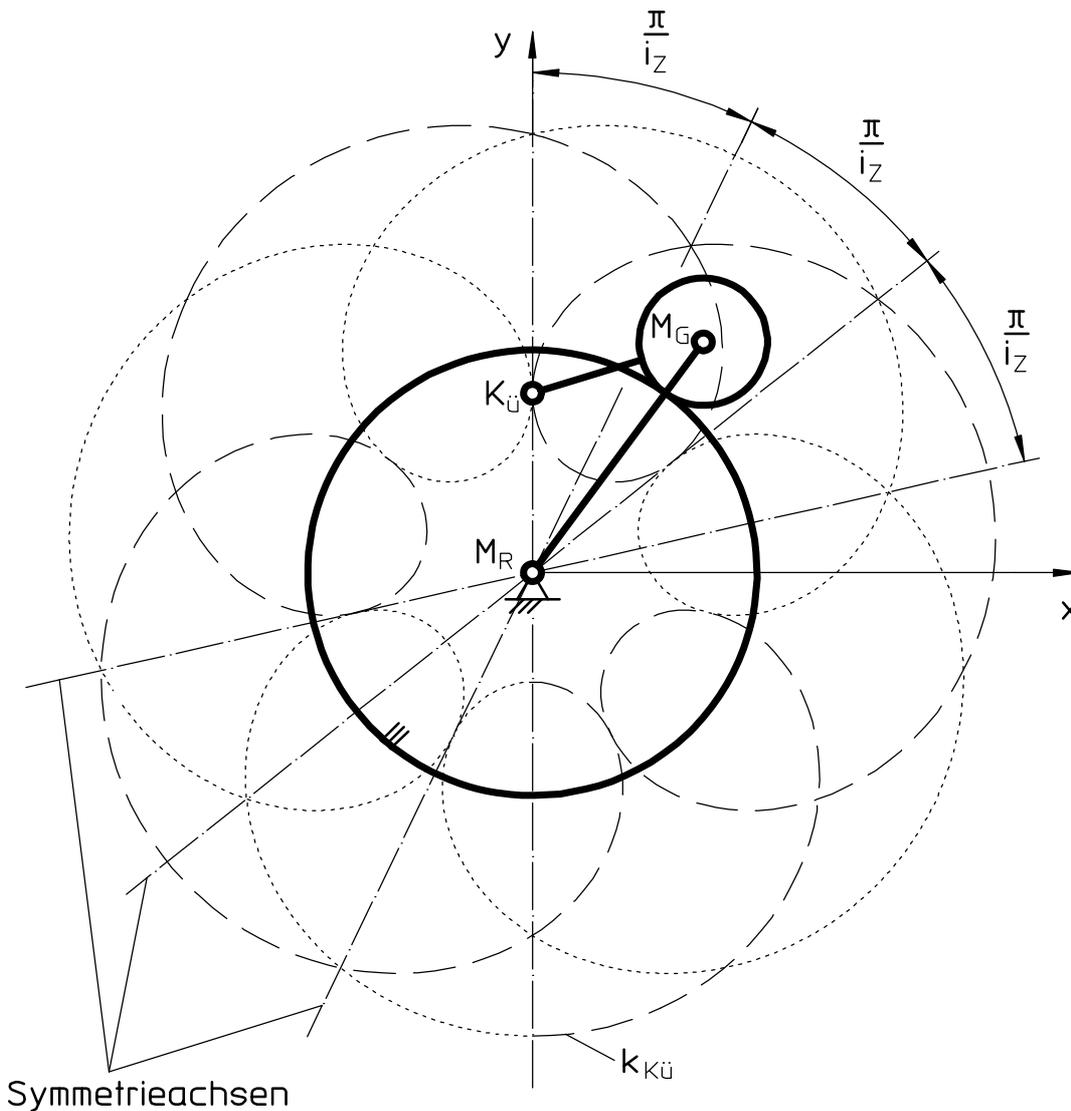


Bild 4.9: Die Symmetrieachsen von Epitrochoiden

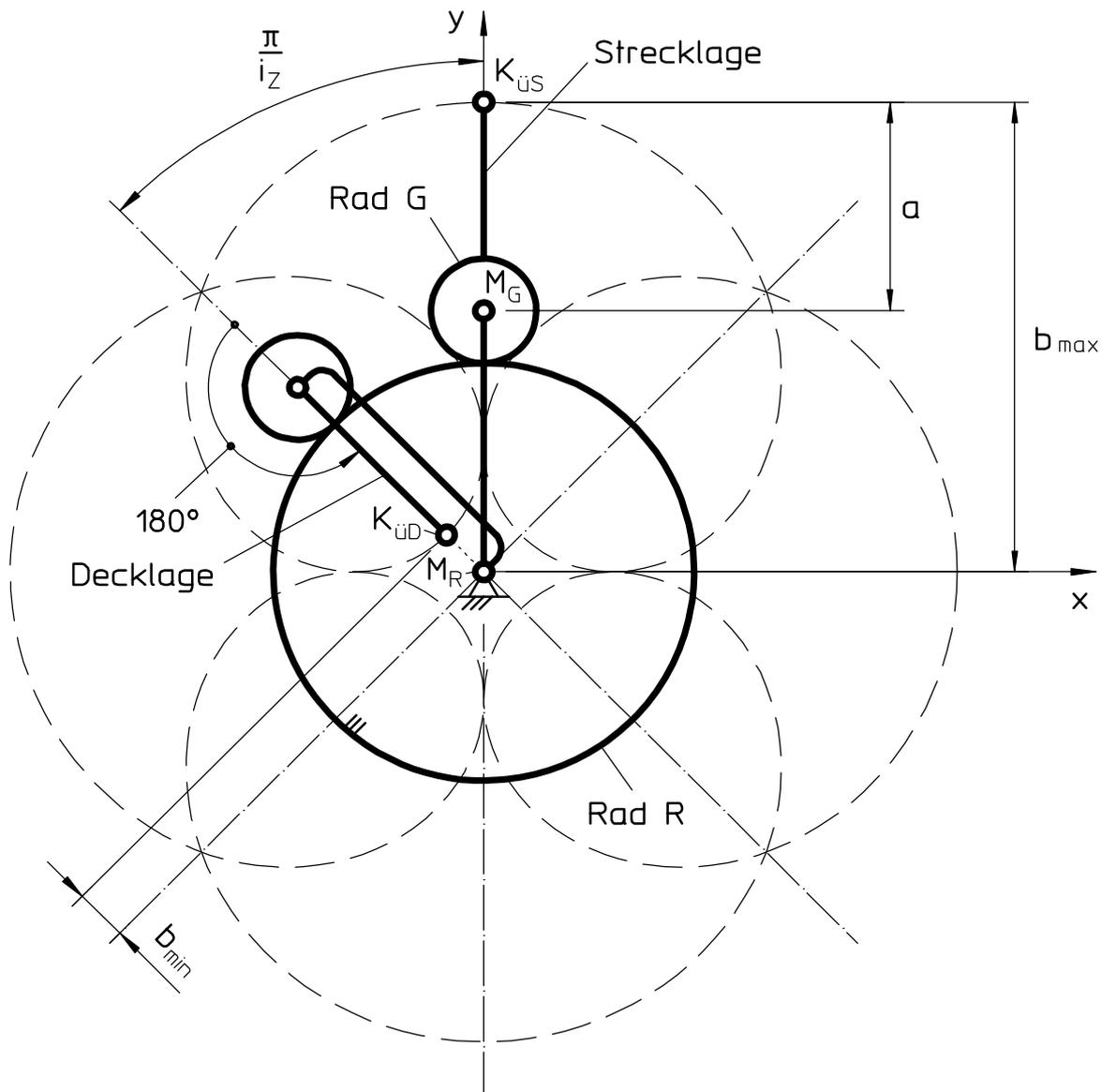


Bild 4.10: Streck- und Decklage eines Getriebes zum Erzeugen von Epitrochoiden

Bekannt ist jedoch folgendes aus Bild 4.10: Befindet sich der Punkt $K_{\text{üS}}$ zum Beispiel in der Strecklage des Getriebes, wo er den größten Abstand $b = b_{\text{max}}$ zum Mittelpunkt M_{R} hat - und liegt er somit auf einer Symmetrieachse -, so durchläuft er nach einer Rotation des Rades G um 180° als $K_{\text{üD}}$ eine Decklage des Getriebes, in der er den minimalen Abstand $b = b_{\text{min}}$ zum Punkt M_{R} aufweist - und ebenfalls auf einer Symmetrieachse liegt -. Die nächste Rotation um 180° bringt den Punkt K wieder in eine Strecklage des Getriebes usw. Zwischen einer Rotation des Koordinatensystems um den Winkel (π / i_z) und einer Rotation des Rades G um $\pi = 180^\circ$ besteht also ein Zusammenhang.

Festzustellen ist auf jeden Fall, daß zwei Rotationen des Koordinatensystems um den Winkel (π / i_z) - also eine Rotation um $(2 \cdot \pi / i_z)$ - die gleiche Lage der Epitrochoiden ergeben (siehe Bild 4.6, S. 83).

Aus dieser Tatsache ist zu schließen, das es nur darauf ankommt,

- ob der Koeffizient n_T geradzahlig sein muß , wenn n_i geradzahlig ist, oder
- ob der Koeffizient n_T ungeradzahlig sein muß , wenn n_i geradzahlig ist.

Bei einer empirischen Untersuchung aller Epitrochoiden mit weniger als 10 Schlingen stellte sich heraus, das n_T immer geradzahlig sein muß , wenn n_i geradzahlig ist. Daher ist anzunehmen, daß $n_T = n_i$ gesetzt werden kann.

Zu beachten ist bei dieser Annahme, daß die Gleichung (4.64) für den Winkel γ_0 bei Epitrochoiden mit ganzzahliger Standgetriebe-Übersetzung i nicht in Gleichung (4.16) übergeht, da n_i immer größer als Null gewählt wird, und somit unterscheiden sich die Ergebnisse um ein n_i -faches von π . Außerdem darf in Gleichung (4.68) nicht n_T durch n_i , sondern es muß der Term $(n_T - i_N)$ durch n_i ersetzt werden. Somit folgt aus Gleichung (4.68)

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{n_i}{i_N} \right) . \quad (4.69)$$

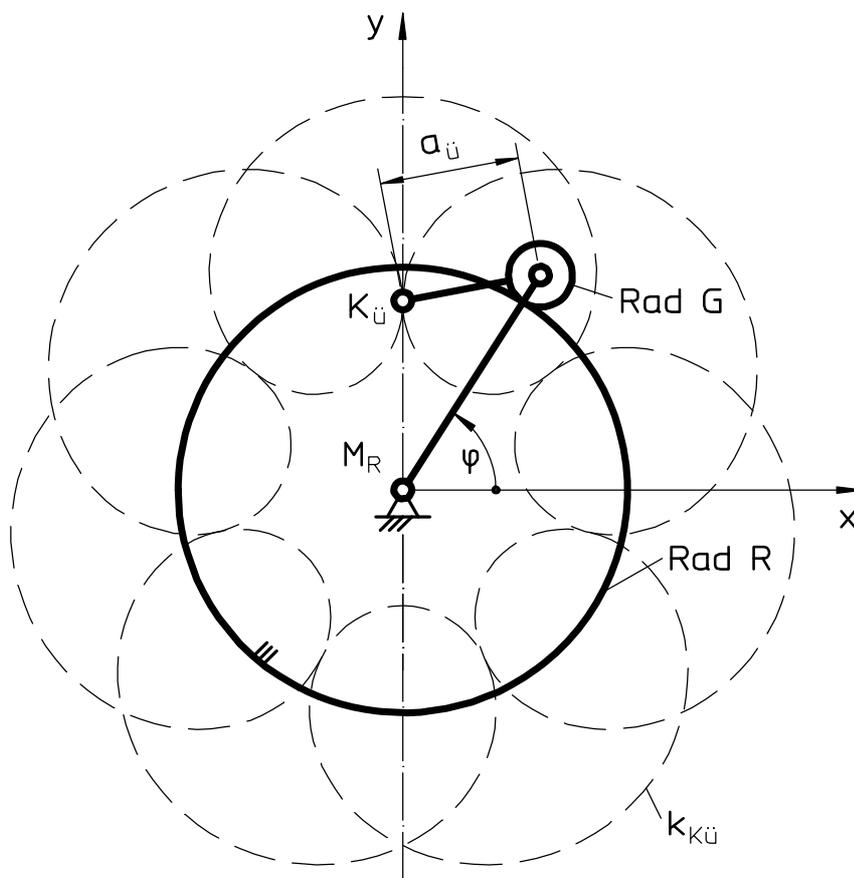


Bild 4.11: Getriebe mit ungeradzahliger Standgetriebe-Übersetzung zum Erzeugen einer Epitrochoide $k_{K\ddot{u}}$

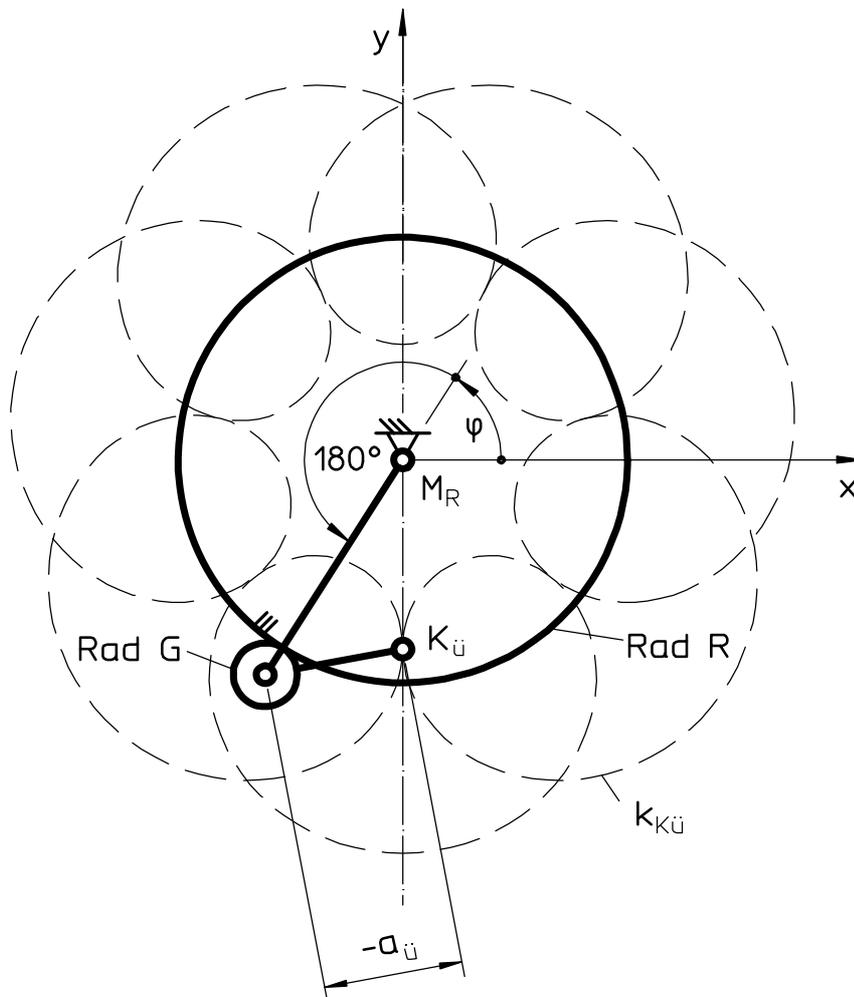


Bild 4.12: Getriebe mit ungeradzahligem Standgetriebe-Übersetzung zum Erzeugen einer Epitrochoide $k_{K_{\ddot{u}}}$ nach einer Rotation des Steges um 180° (vergl. Bild 4.11)

Eine Rotation um π bzw. um 180° einer Epitrochoide bei geradzahligem Standgetriebe-Übersetzung transformiert die Epitrochoide wieder in eine der Ausgangslage gleiche Lage (vgl. Bild 4.2, S. 73). Der Unterschied zwischen den Ergebnissen aus Gleichung (4.64) und Gleichung (4.16) hat also keinen Einfluß bei geradzahligem Standgetriebe-Übersetzung auf die Berechnung des Radius $a_{\ddot{u}}$ des Übergangskreises.

Die gleiche Rotation bei ungeradzahligem Standgetriebe-Übersetzung bewirkt eine Spiegelung der Epitrochoiden an der x-Achse (vgl. Bild 4.11, S. 89, vor der Rotation mit Bild 4.12 nach der Rotation).

Da die Lage des Getriebes durch diese Rotation jedoch nicht nur an der x-Achse, sondern auch an der y-Achse gespiegelt wurde, bewirkt eine Rotation des Koordinatensystems um

180° bei ungeradzahliger Standgetriebe-Übersetzung einen Vorzeichenwechsel des Radius $a_{\ddot{u}}$. Der Übergangskreis ändert sich jedoch dadurch nicht.

Mit Hilfe der Gleichung (4.35) läßt sich nun der Radius $a_{\ddot{u}}$ des Übergangskreises einer periodischen Epitrochoide berechnen. Hierbei ist φ mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens anhand der Gleichungen (4.33), (4.3), (4.64) und (4.4) zu ermitteln, wobei für das Berechnen des Startwerts die Gleichung (4.48) unter Beachtung der Gleichungen (4.66) und (4.69) zu verwenden ist. Für n_i ist hierbei eine ganzzahlige Zahl einzusetzen, deren obere und untere Schranke aus der Ungleichung (4.65) zu ermitteln ist.

4.2.5 Ermitteln aller Selbstberührungspunkte von periodischen Trochoiden

Nach [24] können die Gleichungen (4.1) und (4.2) und somit ebenfalls die Gleichungen (4.17) und (4.18) zur Berechnung von Epitrochoiden auch zur Berechnung von Hypotrochoiden und von Peritrochoiden benutzt werden, wenn die Vorzeichenkonventionen nach Tabelle 4.1 (S. 68/69) eingehalten werden.

Es zeigt sich anhand einer empirischen Untersuchung von Trochoiden, daß der Algorithmus zum Berechnen der Übergangskreise von Epitrochoiden ebenfalls für das Ermitteln der Übergangskreise von Hypotrochoiden eingesetzt werden kann, wenn folgende Regeln verwendet werden:

- Das Vorzeichen von i_Z muß gleich dem Vorzeichen des Radius r_R des Rades R gesetzt werden.
- Das Vorzeichen von i_N ist dem Vorzeichen des Radius r_G des Rades G gleichzusetzen.
- Gleichung (4.64) ist mit $[\text{sign}(i_N)]$ zu multiplizieren, woraus für die Ausgangslage des Winkels γ_0 des Rades G folgt:

$$\gamma_0 = -\text{sign}(i_N) \cdot i \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n_i}{i_Z} \right) . \quad (4.70)$$

- Die Gleichungen (4.47) bzw. (4.48), (4.66) und (4.69) können zur Berechnung des Startwertes φ_1 des Stegwinkels bei Hypotrochoiden und Peritrochoiden nicht einfach übernommen werden.

4.2.5.1 Ausgangslösung bei Peritrochoiden für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes

Das Vorgeben eines Startwertes für Peritrochoiden ist viel weniger problematisch als bei Epitrochoiden. Im allgemeinen ist es ausreichend, einen Startwert größer als Null zu verwenden. Der Startwert muß außerdem (deutlich) kleiner als 90° sein. Das läßt sich folgendermaßen begründen:

Beim Abrollen eines Rades G um ein (kleineres) feststehendes Rad R ist nach Gleichung (4.4) der Betrag der Standgetriebe-Übersetzung $i = r_R / r_G$ bei einem Peritrochoiden erzeugenden Getriebe immer kleiner als 1. Da aufgrund der Vorzeichenvereinbarung nach Tabelle 4.1 (S. 68/69) die Standgetriebe-Übersetzung i immer kleiner Null ist, gilt für Peritrochoiden

$$-1 < i < 0, \quad (4.71)$$

und somit folgt nach Gleichung (4.5) für die Anzahl der Umdrehungen des umlaufenden Rades G je Umdrehung des Steges

$$0 < m < 1. \quad (4.72)$$

Somit kann das umlaufende Rad G nie mehr als eine Umdrehung je Umdrehung des Steges durchführen, woraus folgt, daß es maximal eine Lösung für den Stegwinkel φ je Stegumdrehung geben kann. Nahezu jeder Startwert für φ zwischen 0° und 45° konvergiert daher gegen diese Lösung.

Ein sinnvoller Startwert zum Berechnen des Radius eines Übergangskreises mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens nach Gleichung (4.33) ist nach empirischen Untersuchungen des Verfassers z. B.

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2 \cdot i_Z \cdot n_i}. \quad (4.73)$$

Die Anzahl n_i an Übergangskreisen bei Peritrochoiden läßt sich wie bei Epitrochoiden nach Gleichung (4.65) berechnen.

4.2.5.2 Ausgangslösung bei Hypotrochoiden für das Ermitteln des Selbstberührungspunktes

Bei Hypotrochoiden ist der Betrag der Standgetriebe-Übersetzung i nach Gleichung (4.4) immer größer als 1, da das feststehende Rad R größer als das in ihm abrollende Rad G sein muß. Da nach Tabelle 4.1 (S. 68/69) die Standgetriebe-Übersetzung i immer ein ne-

gatives Vorzeichen hat, folgt für Hypotrochoiden mit $i \geq -2$ aus Gleichung (4.5) für die Anzahl der Umdrehungen des umlaufenden Rades G je Umdrehung des Steges

$$-1 \leq m < 0 . \quad (4.74)$$

Somit gibt es bei Hypotrochoiden mit dem Radienverhältnis $|r_R / r_G| \leq 2$ für einen vorgegebenen Winkel γ_0 des umlaufenden Rades G - genauso wie bei allen Peritrochoiden - nur maximal eine Lösung für den Stegwinkel φ je Stegumdrehung.

Der Startwert φ_1 zur Berechnung des Radius eines Übergangskreises mit Hilfe des NEWTONSchen Näherungsverfahrens nach Gleichung (4.33) muß deshalb nur zwischen 0° und 90° liegen. Nach empirischen Untersuchungen des Verfassers ist es ausreichend, $\varphi_1 = 45^\circ$ zu setzen.

Für alle anderen Hypotrochoiden - also die mit dem Radienverhältnis $|r_R / r_G| \geq 2$ - können zum Ermitteln eines Startwertes für φ die Gleichungen (4.66) und (4.69) für die obere und die untere Grenze dieses Winkels bei Epitrochoiden übernommen werden. Da diese Gleichungen für φ_{\min} und φ_{\max} jedoch bei Hypotrochoiden Werte zwischen 90° und 180° liefern, bewirkt das Verwenden dieser Gleichungen ein Spiegeln der Hypotrochoiden an der y -Achse (Bild 4.13). Dies hat wegen der Symmetrie der Hypotrochoiden bezüglich der y -Achse auf diese keine Auswirkung, aber der Winkel φ für die Strecklage des Steges $M_R M_G$ und der Geraden $M_G K$ ist aufgrund dieser Spiegelung kleiner als der Winkel φ für die waagerechte Lage der Geraden $M_G K$, weshalb für Hypotrochoiden die Bezeichnungen φ_{\min} und φ_{\max} getauscht werden müssen. Demnach gilt:

$$\varphi_{\min} = -\frac{n_i \cdot \pi}{i_Z} + \frac{\pi}{2} , \quad (4.75)$$

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{m} \cdot \left(\frac{i}{2} - \frac{n_i}{i_N} \right) . \quad (4.76)$$

Da der Winkel φ beim Durchfahren des Selbstberührungspunktes $K_{\bar{u}}$ in der Nähe von φ_{\max} liegt, muß bei Hypotrochoiden statt Gleichung (4.48) die Beziehung

$$\varphi_1 = \varphi_{\max} - \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{4} \quad (4.77)$$

zum Ermitteln einer Startlösung verwendet werden. Hierbei ist anzumerken, daß nicht jeder Startwert zwischen φ_{\min} und φ_{\max} gegen eine Lösung zwischen φ_{\min} und φ_{\max} konvergiert! Deshalb führt z. B. das arithmetische Mittel - siehe Gleichung (4.47) - nicht immer zu der gewünschten Lösung.

Die Ungleichung (4.65) kann allerdings bei Hypotrochoiden nicht für das Berechnen der Nummern n_i der existierenden Übergangskreise verwendet werden. Bei empirischen Untersuchungen konnte ermittelt werden, daß für Hypotrochoiden statt dessen gilt:

$$0 < n_i \leq \text{int} \left(\left\lfloor \frac{2 \cdot i_N + i_Z}{2} \right\rfloor \right) \quad (4.78)$$

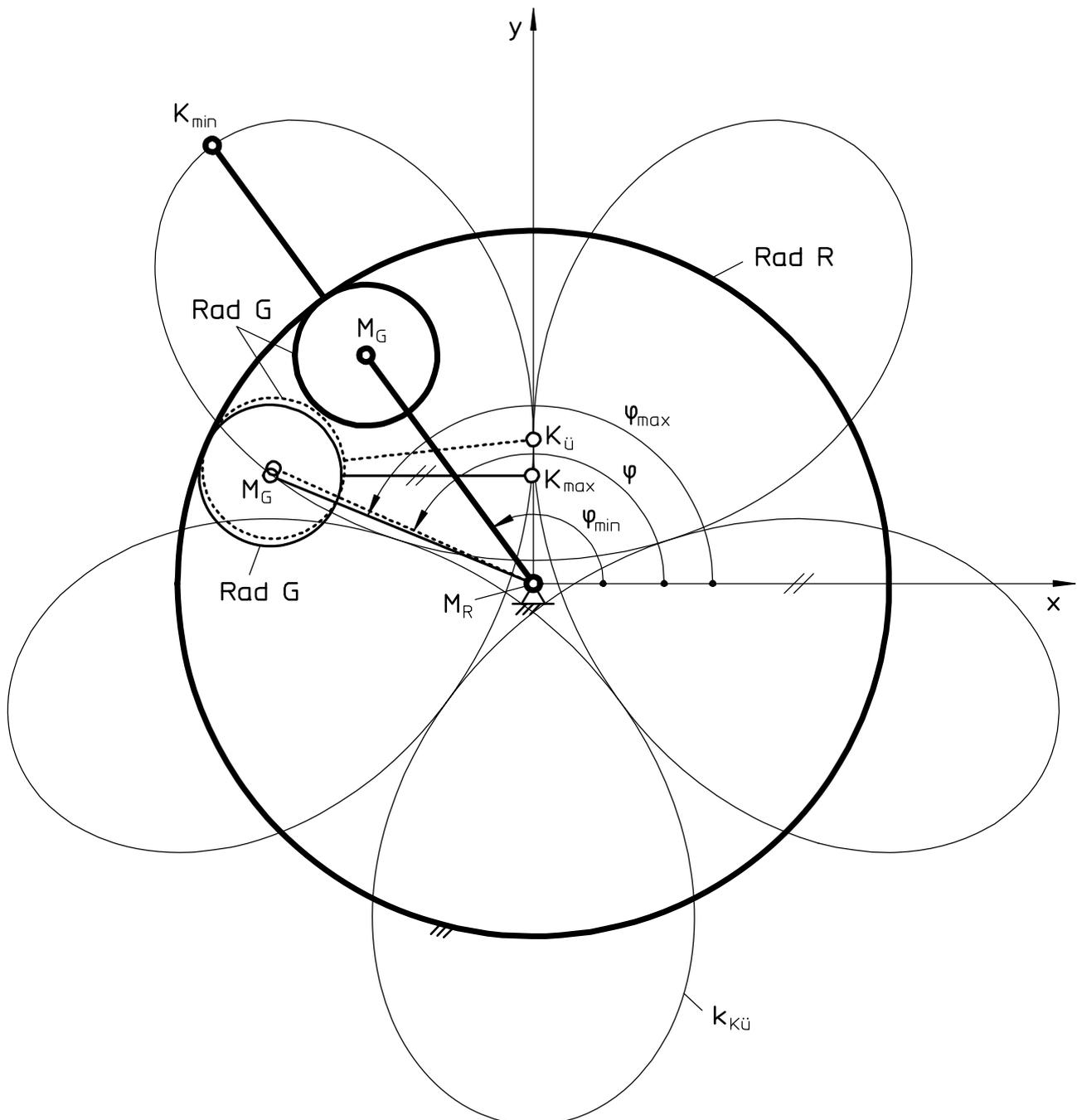


Bild 4.13: Getriebe zum Erzeugen einer Hypotrochoide $k_{Kü}$ in den Lagen des Antriebsgliedes ψ_{min} , ψ und ψ_{max}

4.3 Die BALLSche Kurve der Trochoiden

Der BALLSche Punkt ist dadurch gekennzeichnet, daß sein Krümmungsradius gegen Unendlich geht und daß - als Unterscheidung zum Wendepunkt - der Krümmungsmittelpunkt einer Bahn vor und nach dem Durchlaufen des BALLSchen Punktes auf der gleichen Seite der Bahn liegt. Mathematisch ausgedrückt sind die zweite und die dritte Ableitung (nach einem Antrieb) der Punktbahn im BALLSchen Punkt gleich Null.

Betrachten wir die Ausgangslage eines Getriebes für das Ermitteln der Übergangskurve (Kap. 4.2.1 und Bild 4.2, S. 73), die dadurch gekennzeichnet ist, daß sich der Steg $M_R M_G$ und die Gerade $M_G K$ bzw. $M_G K_b$ in einer Strecklage oder in einer Decklage (Bild 4.14) - und daher der Punkt K sich im größten oder aber im kleinsten Abstand seiner Bahn zum Mittelpunkt M_R der Rastpolkurve R - befinden, so ist festzustellen, daß in dieser Ausgangslage kein Wendepunkt und somit nur ein BALLScher Punkt durchlaufen werden kann. Mit anderen Worten: Es braucht nur eine Gleichung für die zweite Ableitung (nach dem Antrieb) einer Trochoide ermittelt zu werden, um daraus einen BALLSchen Punkt berechnen zu können. Die Gleichungen für die kartesischen Koordinaten einer Trochoide, die durch die oben beschriebene Ausgangslage verläuft, lauten

$$x = r_G \cdot m \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \cos(m \cdot \varphi + \gamma_0) \quad \text{und} \quad (4.79)$$

$$y = r_G \cdot m \cdot \sin(\varphi) + a \cdot \sin(m \cdot \varphi + \gamma_0) . \quad (4.80)$$

Durch zweifaches Ableiten dieser Gleichungen nach dem Stegwinkel φ folgt

$$x'' = -r_G \cdot m \cdot \cos(\varphi) - a \cdot m^2 \cdot \cos(m \cdot \varphi + \gamma_0) \quad \text{und} \quad (4.81)$$

$$y'' = -r_G \cdot m \cdot \sin(\varphi) - a \cdot m^2 \cdot \sin(m \cdot \varphi + \gamma_0) . \quad (4.82)$$

Durch Einsetzen von $\varphi = 90^\circ$ und $(m \cdot \varphi + \gamma_0) = \pm 90^\circ$ in die Gleichungen (4.81) und (4.82) erhält man

$$x'' = -r_G \cdot m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - a \cdot m^2 \cdot \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad (4.83)$$

$$y'' = -r_G \cdot m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - a \cdot m^2 \cdot \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) . \quad (4.84)$$

Die zweite Ableitung x'' der Koordinate x ist also in der betrachteten Lage immer gleich Null, da $\cos(\pm \pi / 2)$ Null ist. Mit $y'' = 0$ folgt für den Abstand des BALLSchen Punktes vom Mittelpunkt M_G der Gangpolkurve aus Gleichung (4.84)

$$a_b = -\frac{r_G}{m} . \quad (4.85)$$

Somit lautet die Gleichung für den Radius der kreisförmigen BALLSchen Kurve (des BALLSchen Kreises) bei Trochoiden

$$r_b = \frac{|r_G|}{m} \quad (4.86)$$

Gleichung (4.86) wird leicht umgeformt in [10] als Grenzfall für das Vorhandensein von Wendepunkten hergeleitet. Der Hinweis fehlt allerdings, daß diese Grenze durch die BALLSche Kurve gebildet wird (vgl. Abschnitt 3.3). Außerdem wird der Anwendungsbereich dieser Gleichung für Getriebe zum Erzeugen von Hypotrochoiden mit der Standgetriebe-Übersetzung $|i| < 2$ ausdrücklich ausgespart, und Getriebe zum Erzeugen von Peritrochoiden werden in diesem Zusammenhang nicht betrachtet.

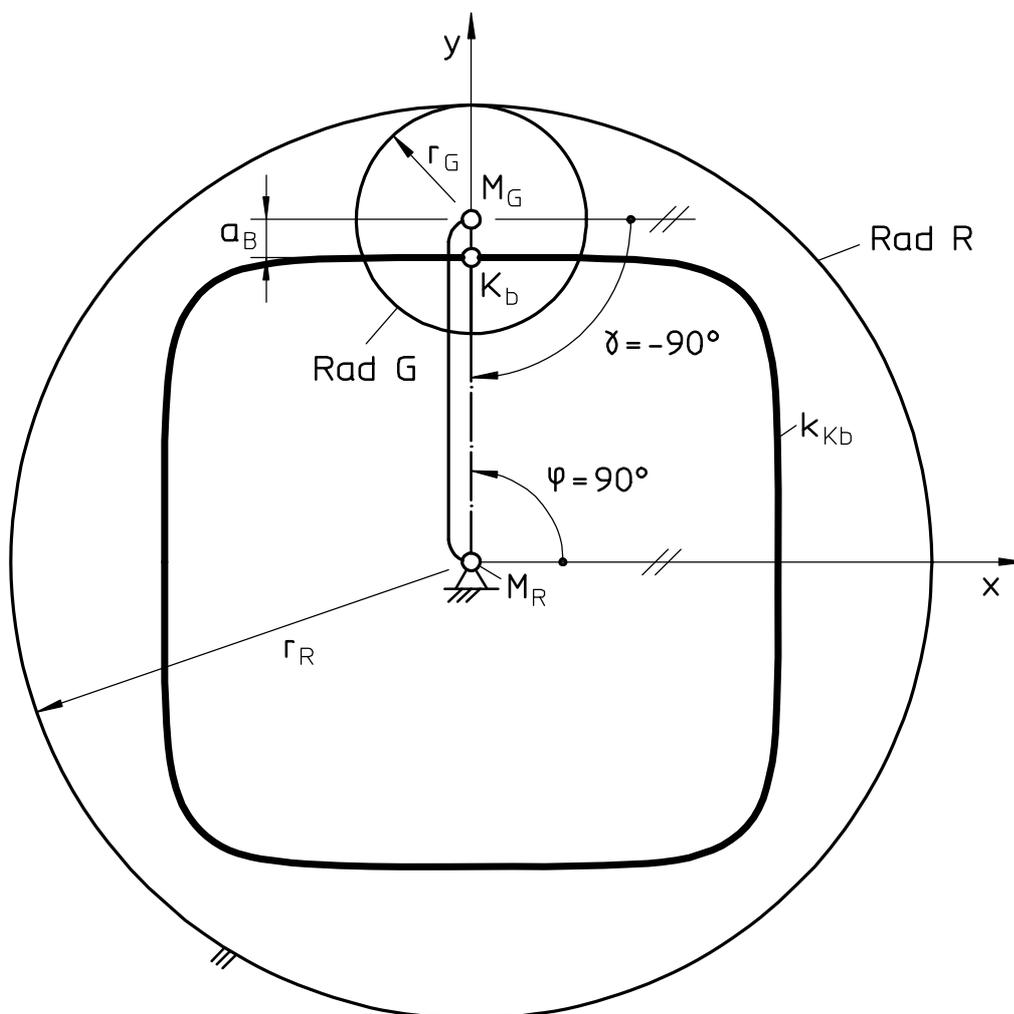


Bild 4.14: Der BALLSche Punkt K_b einer Hypotrochoide k_{Kb}

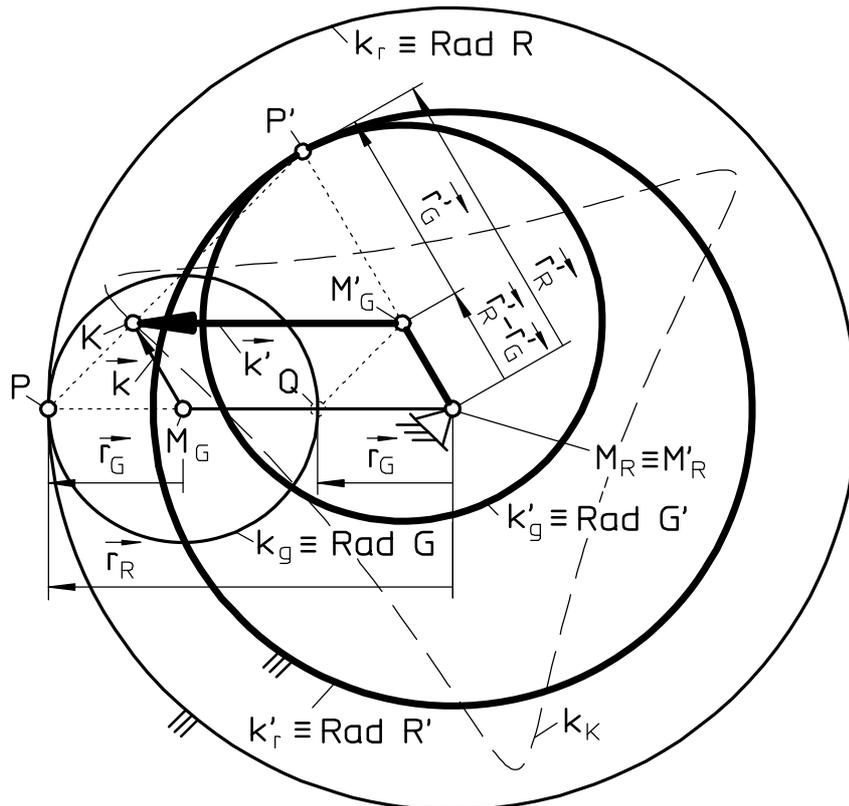


Bild 4.15: Zweifache Erzeugung von Trochoiden
(hier: zweifache Erzeugung einer Hypotrochoide k_k)

4.4 Zweifache Erzeugung geometrisch ähnlicher Trochoiden

Für jede Epi-, Peri- und Hypotrochoide gibt es ein zweites Rädergetriebe (ein Ersatzgetriebe), daß die gleiche Bahn erzeugt. Dieses Phänomen ist unter der Bezeichnung *zweifache Erzeugung von Trochoiden* (Bild 4.15) bekannt [14, 20, 24, 25a].

Ersatzgetriebe für Ausgangsgetriebe zum Erzeugen

- von Epitrochoiden erzeugen Peritrochoiden,
- von Peritrochoiden erzeugen Epitrochoiden und
- von Hypotrochoiden erzeugen Hypotrochoiden

mit jeweils identischen Bahnen [20].

Bild 4.15 zeigt alle Punkte, die zum Ermitteln eines Ersatzgetriebes notwendig sind. Aus ihm geht als Grundlage für den Satz über die *zweifache Erzeugung von Trochoiden* hervor

$\vec{r}_R - \vec{r}_G + \vec{k} = \vec{r}_R' - \vec{r}_G' + \vec{k}'$, da das Polygon $M_R M_G K$ für alle Lagen des Punktes K gleichwertig mit dem Polygon $M_R M_G' K$ ist.

Aus Bild 4.15 geht weiterhin aufgrund der Gleichheit der Dreiecke $\square PM_G K$ und $\square QM_R M_G'$ für Hypotrochoiden hervor

$$\frac{|r_R|}{|r_G|} = \frac{|r_R'|}{|r_R'| - |r_G'|} \quad (4.87)$$

Gleichung (4.87) lautet unter Beachtung der Vorzeichenregelung nach Tabelle 4.1 (S. 68/69), nach der der Radius r_R bei Hypotrochoiden ein negatives Vorzeichen besitzt,

$$\frac{-r_R}{r_G} = \frac{-r_R'}{-r_R' - r_G'} \quad (4.88)$$

Durch Einsetzen von

$$\frac{r_R}{r_G} (= i) = \frac{i_Z}{i_N} \quad (4.89)$$

[vgl. Gleichungen (4.4) und (4.7)] in Gleichung (4.88) folgt

$$\frac{-i_Z}{i_N} = \frac{-i_Z'}{-(i_Z' + i_N')} \quad (4.90)$$

und nach dem Umstellen nach i_N'

$$-i_N' = \frac{i_Z'}{i_Z} \cdot i_N + i_Z' \quad (4.91)$$

Soll mit dieser Gleichung die Übersetzung des Ersatzgetriebes ermittelt werden, so ist die Unbekannte i_Z' vorab zu ermitteln. Da die Anzahl der Schlingen, Spitzen oder „abgerundeten Ecken“ von Ausgangs- und Ersatzgetriebe identisch sein soll, muß

$$i_Z = i_Z' \quad (4.92)$$

sein (Vergleiche Absatz 4.1). Durch Einsetzen von Gleichung (4.92) in Gleichung (4.91) folgt

$$i_N' = -(i_N + i_Z) \quad (4.93)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für Ersatzgetriebe von Hypotrochoiden, sondern auch für Ersatzgetriebe von Epi- und Peritrochoiden.

Es ist nun möglich, für die *zweifache Erzeugung von Trochoiden* aus der Übersetzung i_Z/i_N des Ausgangsgetriebes die Übersetzung i_Z'/i_N' des Ersatzgetriebes zu ermitteln. Da hierfür nicht der Abstand des die Trochoide erzeugenden Punktes verwendet wird, werden alle von einem Getriebe erzeugten Trochoiden ein zweites Mal von dem gleichen Ersatzgetriebe erzeugt. Die Trochoiden des lediglich auf diese Art entworfenen Ersatzgetriebes sind denen des Ausgangsgetriebes allerdings nur geometrisch ähnlich, da zum zweifachen Erzeugen der gleichen Trochoide noch der Maßstab für das Ersatzgetriebe zu ermitteln ist.

[Vergleiche hierzu die Trochoiden $k_{K\ddot{u}}$, k_{Kg} und k_{Kb} von Bild 4.16 (S. 100) mit denen in Bild 4.17 (S. 101) sowie die in Bild 4.18 (S. 102) mit denen in Bild 4.19 (S. 103), die zwar jeweils geometrisch ähnlich aber unterschiedlich groß sind.]

4.5 Die Feldeinteilung bei Trochoiden

In Kapitel 4.1 wurde die bekannte Einteilung [20] einer bewegten Ebene zum Erzeugen von Trochoiden in zwei Felder mit Hilfe der Gangpolkurve beschrieben.

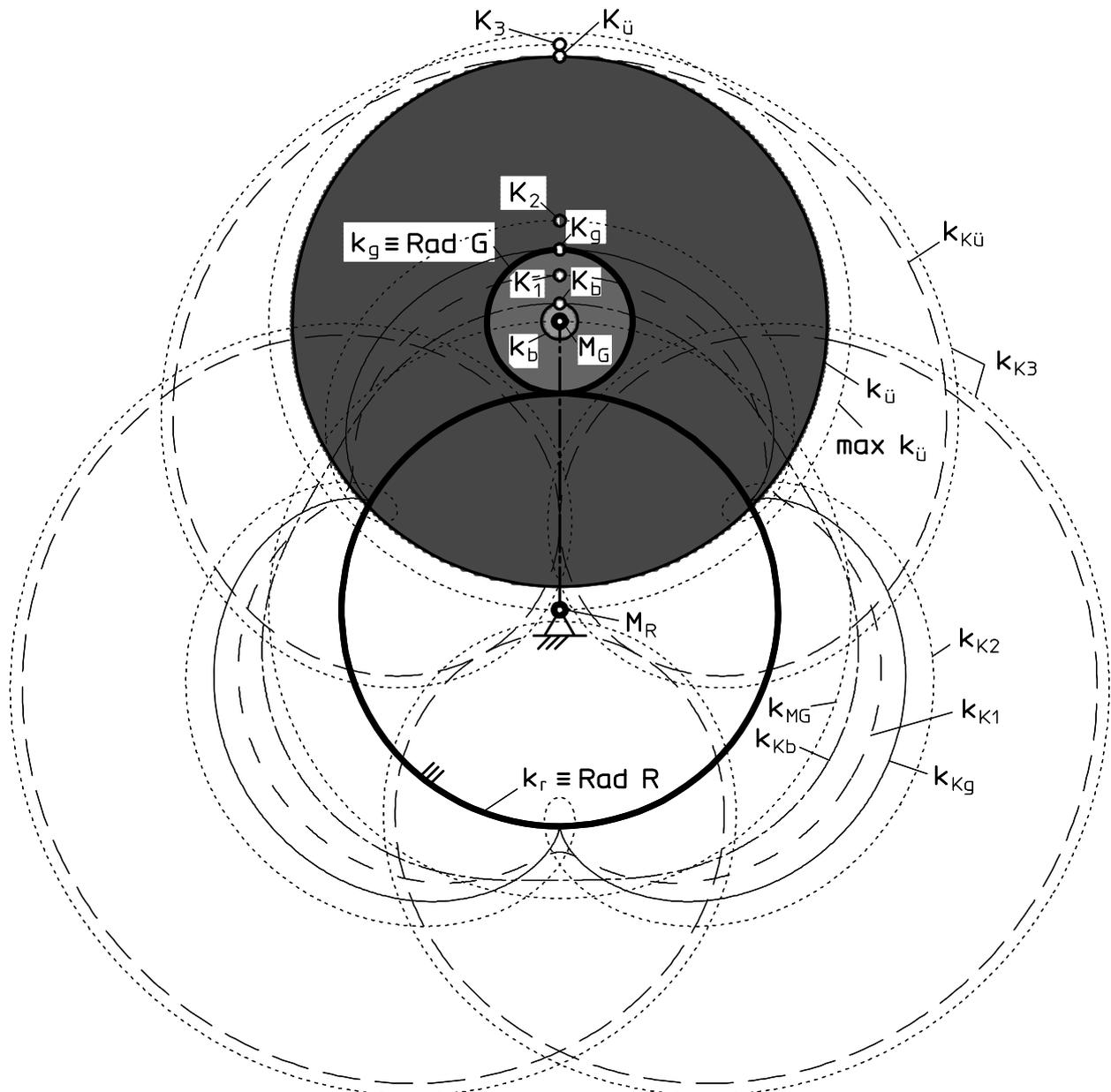
- Das Feld, in dem sich der Mittelpunkt M_R des Rades R befindet, weist demnach Punkte auf, die verschlungene (verlängerte) Trochoiden erzeugen [In den Bildern 4.16, bis 4.19 (S. 100 ff) erhält man dieses Feld durch das Zusammensetzen eines Gesamtfeldes aus weißem und dunkelgrauem Teilfeld]. In diesem Gesamtfeld liegen also auch die Übergangskurven $k_{K\ddot{u}}$, da die Selbstberührungspunkte immer zwischen zwei Schlingen auftreten [Bilder 4.6 (S. 83) bis 4.8 (S. 85) sowie Bilder 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S. 103)]. Aus Bild 4.3 (S. 74) geht hervor, daß der Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$, die zugehörigen Momentanpole P und P' sowie die Mittelpunkte M_G und M'_G der Gangpolkurve immer auf der gleichen Seite der x-Achse (oder auf ihr) liegen müssen. Daraus ist zu folgern, daß alle Selbstberührungspunkte zwischen der Gangpolkurve und dem Mittelpunkt M_R der Rastpolkurve liegen. Daraus folgt für den Radius der Übergangskurve

$$|r_G| \leq r_{\ddot{u}} \leq |r_G+r_R| \quad \text{für } |r_G| \leq |r_G+r_R| \quad \text{bzw.} \quad (4.94)$$

$$|r_G+r_R| \leq r_{\ddot{u}} \leq |r_G| \quad \text{für } |r_G| \geq |r_G+r_R| . \quad (4.95)$$

- Das andere Gesamtfeld weist verkürzte Trochoiden („mit abgerundeten Ecken“) auf. [In den Bildern 4.16 bis 4.19 (S. 100 ff) erhält man dieses Feld durch das Zusammensetzen von hellgrauem und mittelgrauem Teilfeld zu einem Gesamtfeld.] Nur in diesem Gesamtfeld gibt es Punkte, die Trochoiden mit Wendepunkten erzeugen, die bekannterweise bei verschlungenen Trochoiden nicht auftreten. Somit liegt die BALLSche Kurve in dem (zusammengesetzten) Gesamtfeld, in dem sich **nicht** der Mittelpunkt M_R des Rades R befindet.

Nach R. MÜLLER erzeugen Punkte auf einer Seite der Gangpolkurve Bahnen mit einem Selbstschnittpunkt mehr als Punkte auf der anderen Seite der Gangpolkurve. Diese Tatsache scheint sich auf den ersten Blick bei Trochoiden nicht zu bestätigen. Bei einer Epitrochoide mit der Standgetriebe-Übersetzung $i = 4$ weisen z. B. Punkte innerhalb der Gangpolkurve (wie z. B. ihr Mittelpunkt M_G) Bahnen ohne Selbstschnittpunkte und Punkte außerhalb der Gangpolkurve (z. B. der Punkt K in Bild 4.2, S. 73) Bahnen mit mindestens vier Selbstschnittpunkten auf.



Legende: K_{\dots} : Punkte; k_{\dots} : Kurven, Bahnen; $k_{K_{\dots}}$: Bahnen der Punkte K_{\dots}

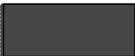
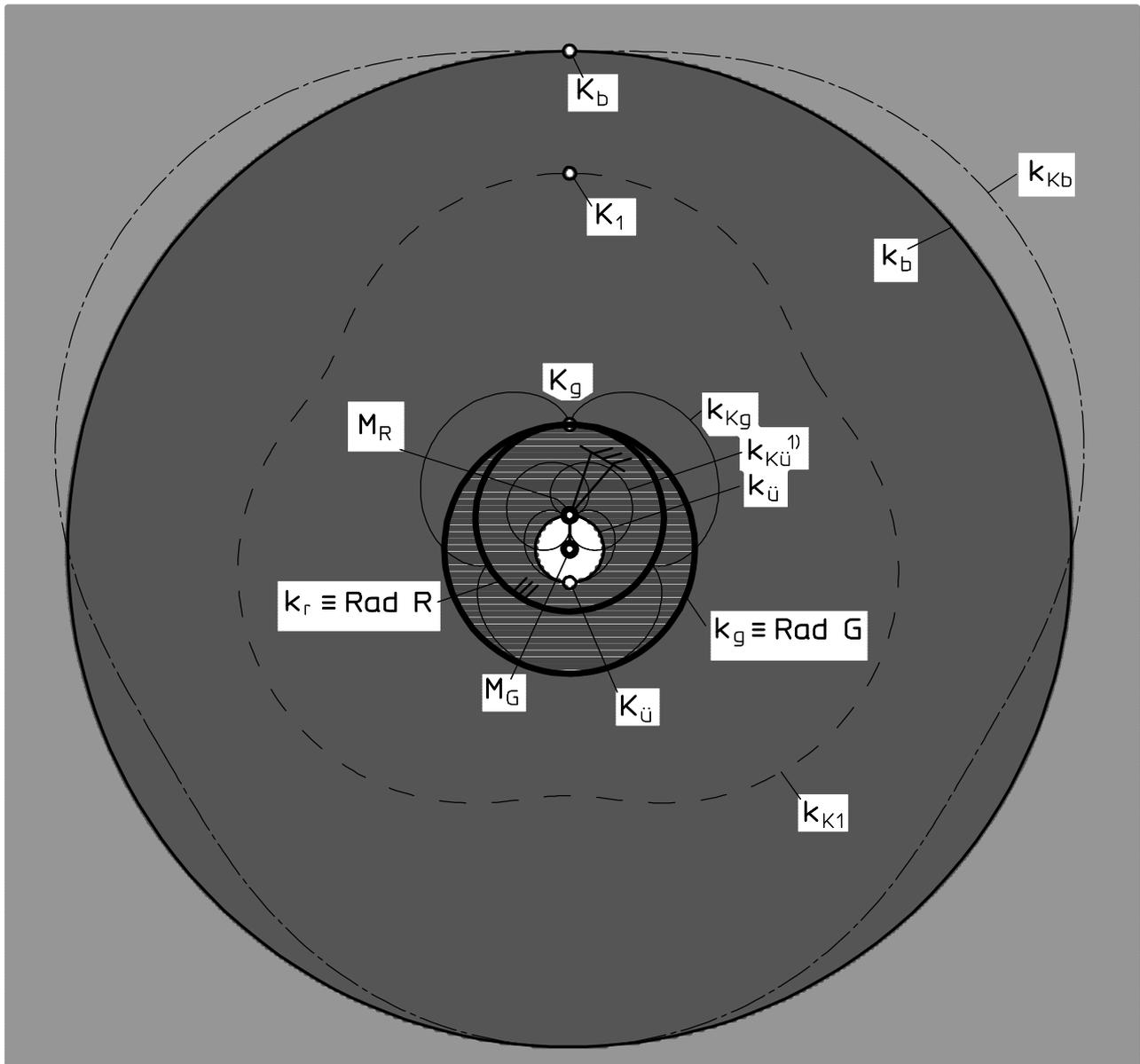
Feld	Anzahl Selbstschnittpunkte	Anzahl Wendepunkte
	Maximal mögliche Anzahl ($n_{S_{max}}$)	0
	Abhängig von Übergangskurve (n_S)	0
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	$2 \cdot i_z$
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	0

Bild 4.16: Die Feldeinteilung bei Epitrochoiden erzeugenden Getrieben
 (In diesem Beispiel ist $i = i_z / i_N = 3/1$; $n_{S0} = 0$; $n_S = 3$; $n_{S_{max}} = 9$)



¹⁾ Genauer Verlauf der Kurve $k_{K\ddot{U}}$ siehe Bild 4.16

Legende: $K_{...}$: Punkte; $k_{...}$: Kurven, Bahnen; $k_{K_{...}}$: Bahnen der Punkte $K_{...}$

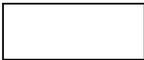
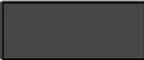
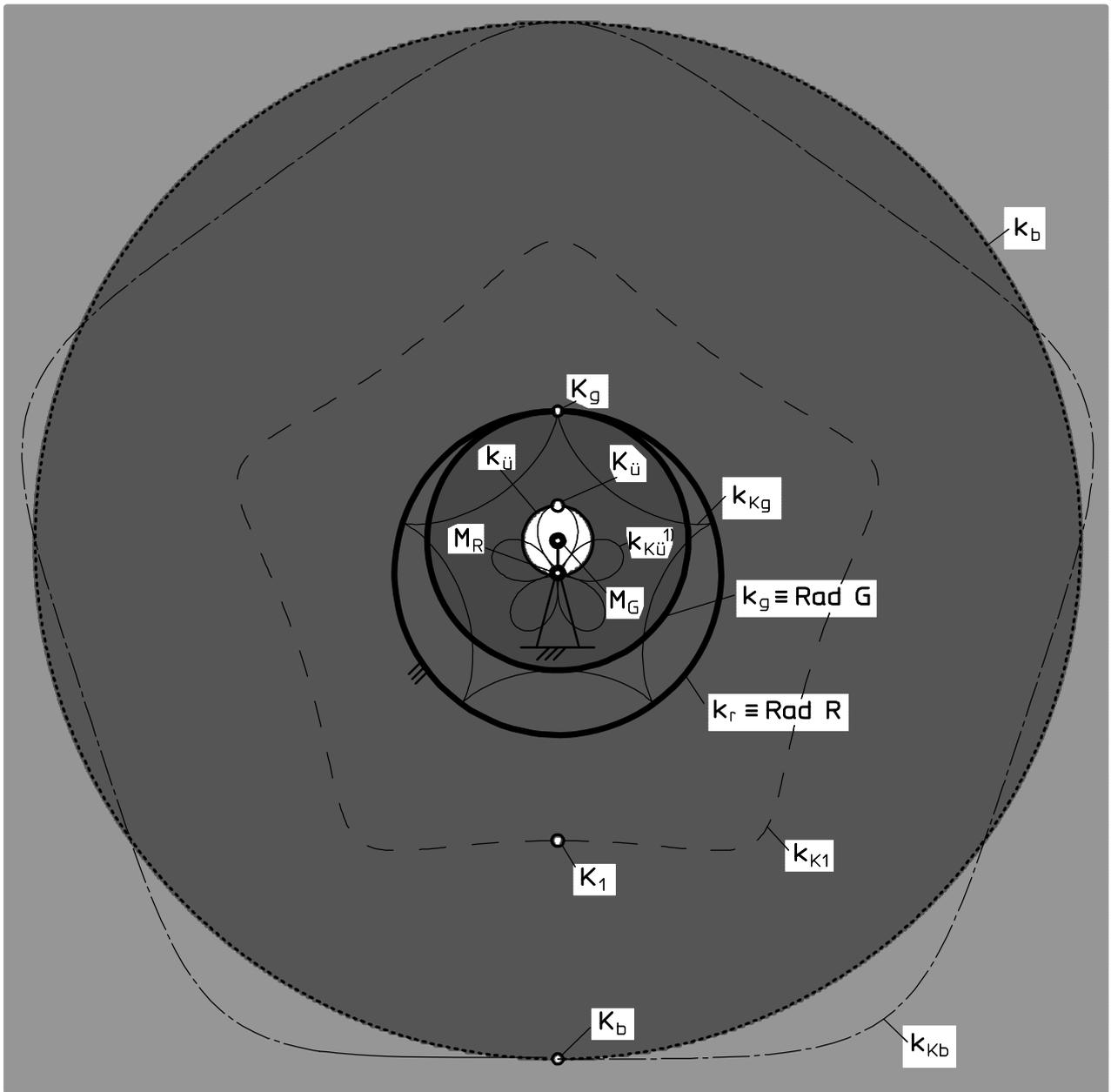
Feld	Anzahl Selbstschnittpunkte	Anzahl Wendepunkte
	Maximal mögliche Anzahl ($n_{S_{max}}$)	0
	Abhängig von Übergangskurve (n_S)	0
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	$2 \cdot i_z$
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	0

Bild 4.17: Die Feldeinteilung bei Peritrochoiden erzeugenden Getrieben
 (In diesem Beispiel ist $i = i_z / i_N = 3/4$; $n_{S0} = 0$; $n_S = 3$; $n_{S_{max}} = 9$)

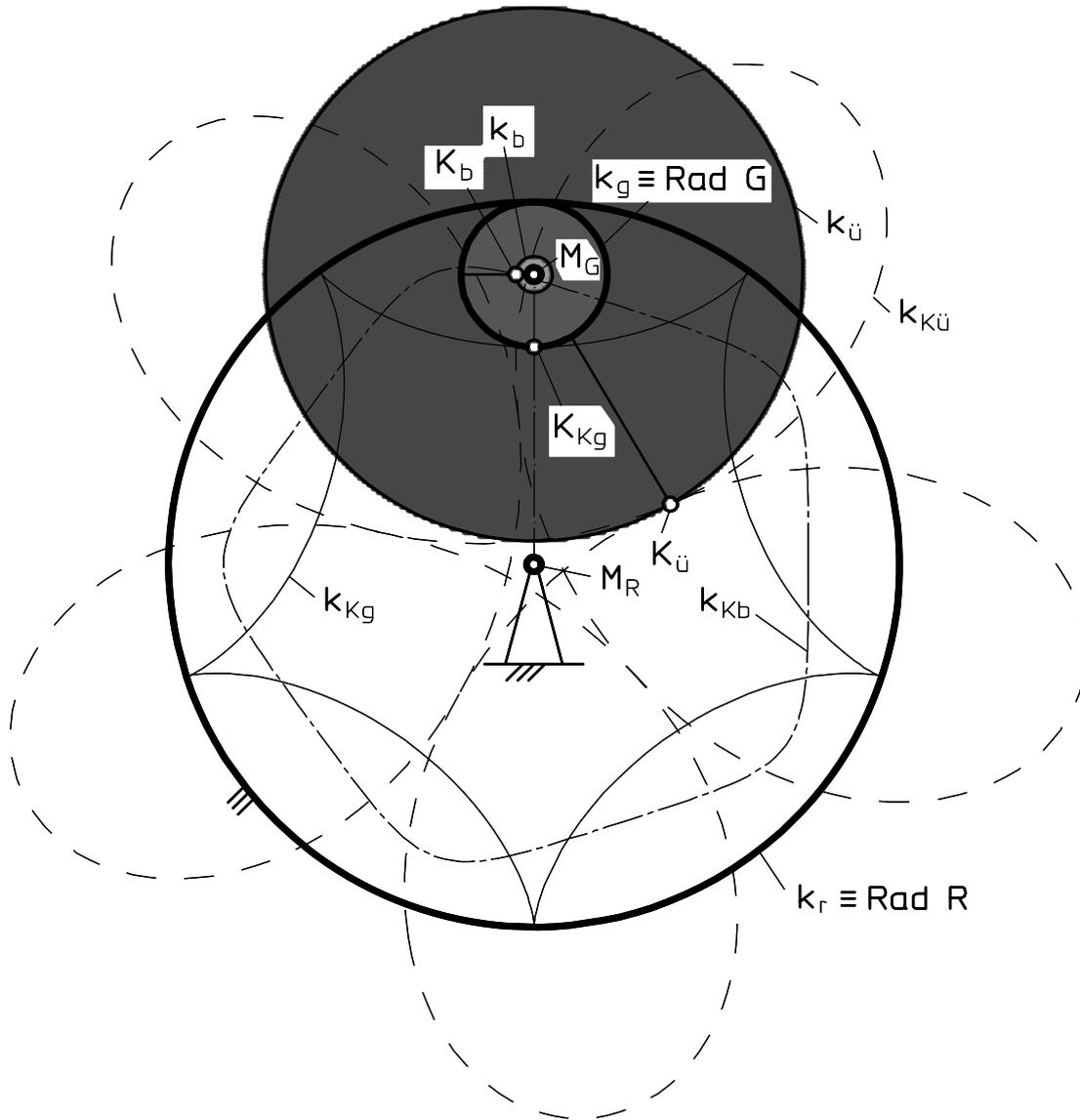


¹⁾ Genauer Verlauf der Kurve $k_{K_{\ddot{u}}}$ siehe Bild 4.19

Legende: K_{\dots} : Punkte; k_{\dots} : Kurven, Bahnen; $k_{K_{\dots}}$: Bahnen der Punkte K_{\dots}

Feld	Anzahl Selbstschnittpunkte	Anzahl Wendepunkte
	Maximal mögliche Anzahl (n_{Smax})	0
	Abhängig von Übergangskurve (n_S)	0
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	$2 \cdot i_z$
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	0

Bild 4.18: Die Feldeinteilung bei Hypotrochoiden erzeugenden Getrieben mit $(|r_R / r_G| < 2)$ (In diesem Beispiel ist $i = i_z / i_N = 5/4$; $n_{S0} = 0$; $n_S = 5$; $n_{Smax} = 15$)



Legende: $K_{...}$: Punkte; $k_{...}$: Kurven, Bahnen; $k_{k_{...}}$: Bahnen der Punkte $K_{...}$

Feld	Anzahl Selbstschnittpunkte	Anzahl Wendepunkte
	Maximal mögliche Anzahl (n_{Smax})	0
	Abhängig von Übergangskurve (n_S)	0
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	$2 \cdot i_z$
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	0

Bild 4.19: Die Feldeinteilung bei Hypotrochoiden erzeugenden Getrieben mit ($|r_R/r_G| > 2$) (In diesem Beispiel ist $i=i_z/i_N=5/1$; $n_{S0}=0$; $n_S=5$; $n_{Smax}=15$)

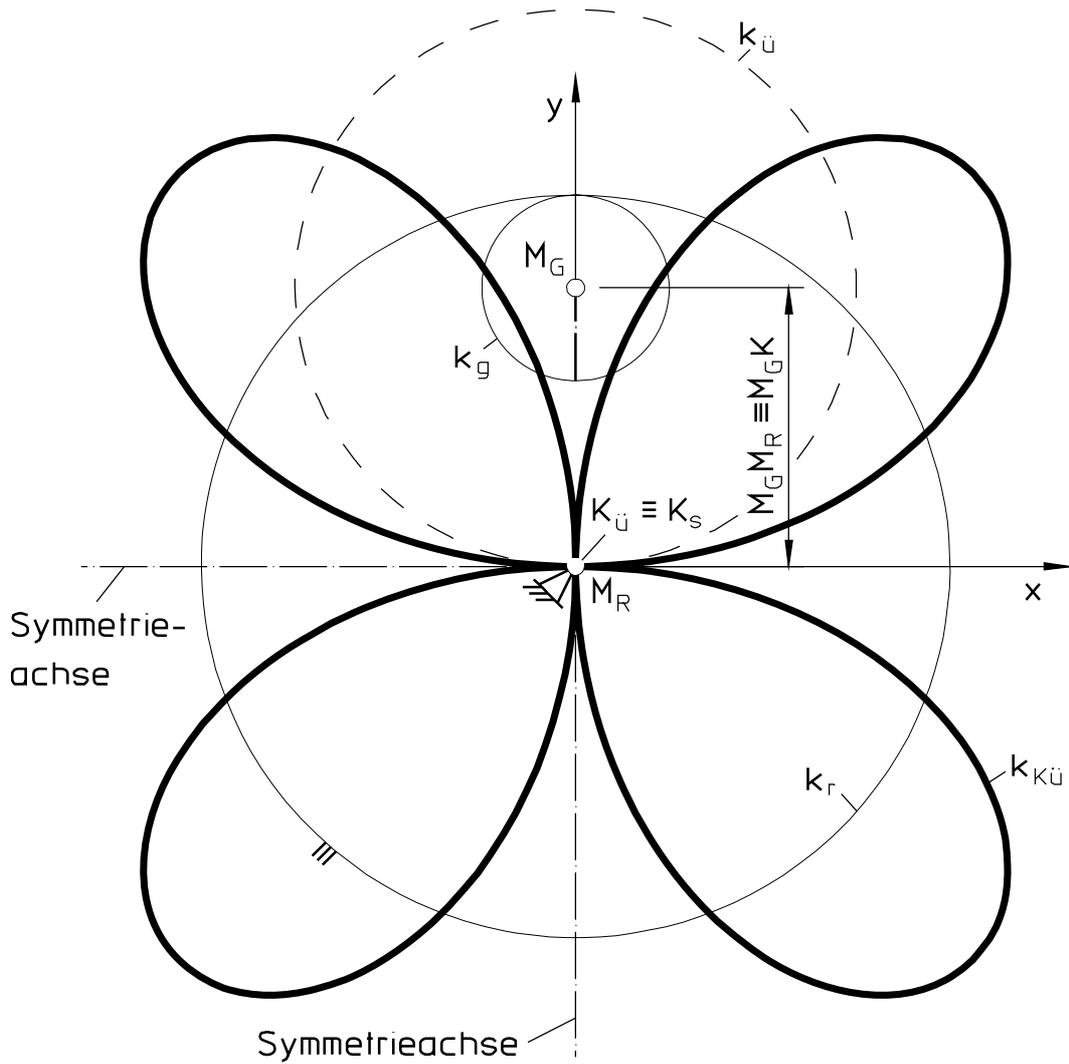
Hierbei ist jedoch zu beachten, daß das Rad G und somit die Gangpolkurve sich $i_z = 4$ mal auf dem Rad R und somit der Rastpolkurve abwälzt. (Das Rad G macht dabei allerdings $m = 5$ Umdrehungen gegenüber der ruhenden Ebene.) Allgemein ist daraus zu schlußfolgern, daß die Gangpolkurve einer periodischen Trochoide nicht aus einem Kreis sondern aus i_z Gangpolkurvenästen in Form von Kreisen besteht. Somit liegen zwischen einem Punkt innerhalb und einem Punkt außerhalb der Gangpolkurve i_z Gangpolkurvenäste, und daher weist die Bahn von einem der genannten Punkte pro Gangpolkurvenast einen, insgesamt also i_z Selbstschnittpunkte mehr als die Bahn des anderen Punktes auf. (Vgl. z. B. in Bild 4.16, S.100, die Bahn k_{K_1} des Punktes K_1 mit Null Selbstschnittpunkten und die Bahn k_{K_2} des Punktes K_2 mit $i_z = 3$ Selbstschnittpunkten.)

Diese Herleitung läßt sich nicht ohne weiteres auf die Übergangskurve übertragen. Einerseits wälzt die Übergangskurve auf keiner anderen Kurve ab, andererseits gibt es zwei verschiedene Ausprägungen der Eigenschaften der Übergangskurve bezüglich der Feldeinteilung:

- Im allgemeinen erzeugt ein Selbstberührungspunkt eine Bahn, bei der sich alle benachbarten, übernächsten, drittnächsten oder n -nächsten Schlingen berühren [Bilder 4.6 (S. 83) bis 4.8 (S. 85)]. Da verschlungene Trochoiden i_z Schlingen aufweisen, erzeugen Punkte auf der einen Seite einer Übergangskurve im allgemeinen Bahnen mit $(2 \cdot i_z)$ Selbstschnittpunkten mehr als Punkte auf der anderen Seite der Übergangskurve, da sich bei den erstgenannten Punkten i_z Schlingen mehr überlappen und pro Schlinge zwei Selbstschnittpunkte erzeugen.
- Bewegte Ebenen zum Erzeugen von Trochoiden mit geradzahlgiger Anzahl an Schlingen weisen eine Übergangskurve auf, die durch den Mittelpunkt M_R der Rastpolkurve verläuft, wobei der Abstand $M_G K$ gleich der Steglänge $M_G M_R$ ist (Bild 4.20). Bei den von Punkten der Übergangskurve erzeugten Trochoiden handelt sich um sogenannte Rhodoneen (oder Rosenkurven) [14]. Alle bei Rhodoneen vorkommenden Selbstberührungspunkte liegen übereinander. Bezüglich der Überlappung von Kurvenbereichen ist entscheidend, daß jede der Tangenten der Selbstberührungspunkte eine Symmetrieachse darstellt. Die in diesem Abschnitt betrachteten Trochoiden weisen $(i_z / 2)$ Symmetrieachsen auf, und somit gibt es $(i_z / 2)$ Schlingen, die sich auf der Symmetrieachse überlappen können, wobei sie dabei i_z Selbstschnittpunkte hervorrufen.

Mit dem in diesem Kapitel hergeleiteten Wissen läßt sich nunmehr eine vollständige Einteilung einer Trochoiden erzeugenden bewegten Ebene in *Felder mit Punkten zum Erzeugen qualitativ gleicher Koppelpunktbahnen* erstellen (vgl. Tabelle 4.1, S. 68/69):

- Es existiert ein Feld, das nur von der BALLschen Kurve k_b (und ggf. dem Unendlichen) begrenzt wird [hellgraues Feld in den Bildern 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S. 103)]. Punkte dieses Feldes erzeugen verkürzte Trochoiden ohne Wendepunkte (Kurve k_{MG} in Bild 4.16) und der vom Verfasser empirisch ermittelten Anzahl an Selbstschnittpunkten von



Über dem Mittelpunkt M_R der Rastpolkurve k_r befindliche Selbstberührungspunkte K_s einer Hypotrochoide $k_{K\ddot{U}}$

$$n_{s0} = (|i_N| - 1) \cdot |i_z| \quad \text{für Hypotrochoiden mit dem Radienverhältnis } |r_R/r_G| \geq 2 \text{ und bei Epitrochoiden.} \quad (4.96)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4.93) in Gleichung (4.96) folgt aufgrund der zweifachen Erzeugung von Trochoiden

$$n_{s0} = (|i_N + i_z| - 1) \cdot |i_z| \quad \text{für Hypotrochoiden mit dem Radienverhältnis } |r_R/r_G| \leq 2 \text{ und bei Peritrochoiden.} \quad (4.97)$$

- Das Feld zwischen der BALLSchen Kurve und der Gangpolkurve [mittelgraues Feld in den Bildern 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S.103)] weist Punkte auf, die Trochoiden mit $(2 \cdot i_z)$ Wendepunkten (Kurven k_{K1} in den Bildern 4.16 bis 4.18) und mit n_{s0} Selbstschnitt-

punkten hervorbringen. Es ist das einzige Feld, dessen Punkte Bahnen mit Wendepunkten erzeugen.

- Das durch die Gangpolkurve begrenzte, der Begrenzung durch die BALLSche Kurve abgewandte Feld [dunkelgraues Feld in den Bildern 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S. 103)] enthält Punkte zum Erzeugen verschlungener Trochoiden mit

$$n_S = n_{S0} + i_Z \quad (4.98)$$

Selbstschnittpunkten (Kurve k_{K2} in Bild 4.16, S. 100). Dieses Feld wird durch eine Übergangskurve begrenzt, wenn $\max(n_i) \geq 1$ ist. Im anderen Fall gibt es keine weiteren Felder.

- Auf der der BALLSchen Kurve abgewandten Seite der Gangpolkurve gibt es $\max(n_i)$ Übergangskurven. Existieren Felder, die von zwei Übergangskurven $k_{üi}$ begrenzt werden (Bild 4.21), so enthalten sie Punkte, die verschlungene Trochoiden mit

$$n_S = n_{S0} + (1 + 2 \cdot \min(n_i, n_{i+1})) \cdot i_Z \quad (4.99)$$

Selbstschnittpunkten aufweisen. Grafisch lassen sich die Nummern n_i der Übergangskurven bestimmen, indem die Übergangskurven mit 1 beginnend durchnummeriert werden, wobei die der Gangpolkurve am nächsten liegende Kurve die Zahl $n_i = 1$ zugewiesen bekommt.

- Ein Feld, das nur durch eine Übergangskurve begrenzt wird [weißes Feld in den Bildern 4.16 (S. 100) bis 4.19 (S. 103)], enthält Punkte, die n_{Smax} Selbstschnittpunkte aufweisen (Kurve k_{K3} in Bild 4.16, S. 100).

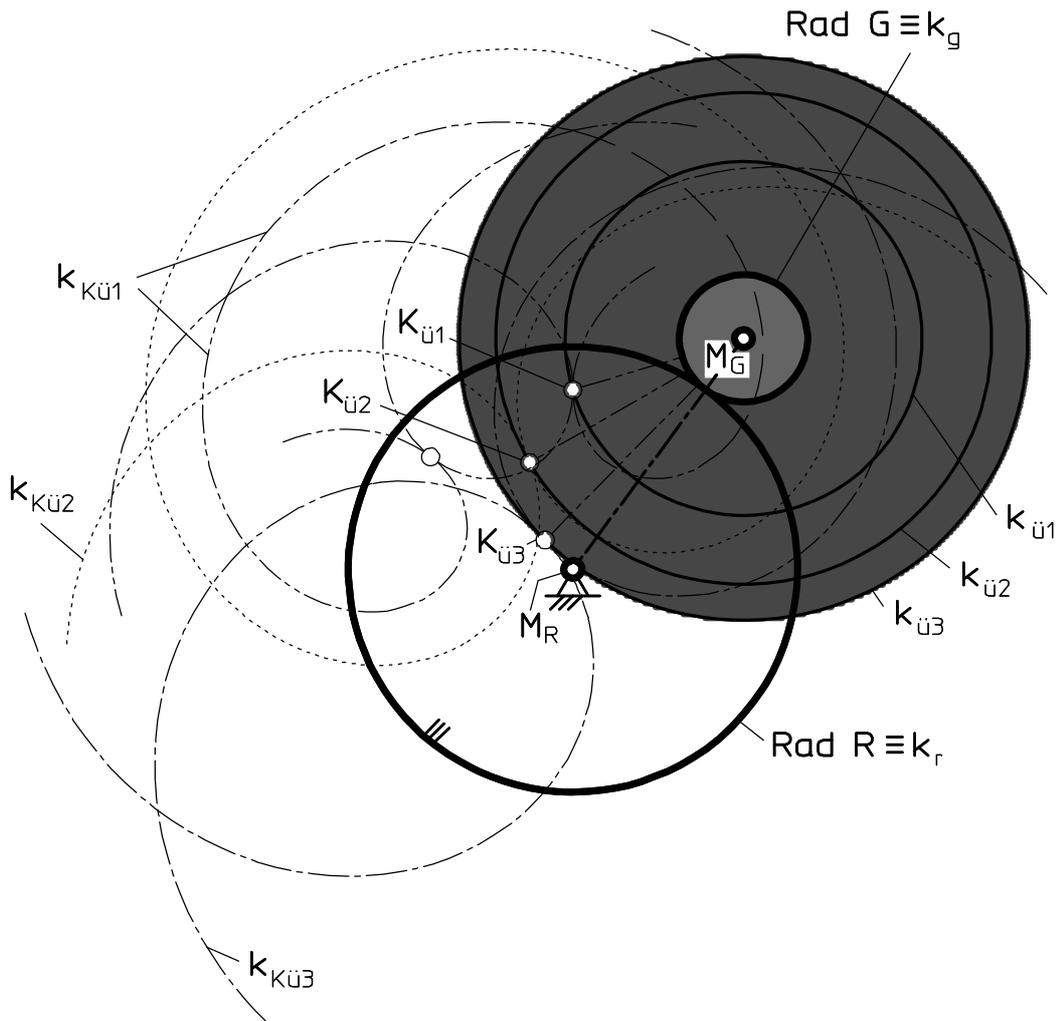
– Handelt es sich dabei um Punkte, die zu einem Rädergetriebe mit gerader Standgetriebe-Übersetzung gehören, so ist

$$n_{Smax} = n_{S0} + 2 \cdot \max(n_i) \cdot i_Z, \quad (4.100)$$

– ansonsten ist

$$n_{Smax} = n_{S0} + [1 + 2 \cdot \max(n_i)] \cdot i_Z. \quad (4.101)$$

Eine Ausnahme stellt hierbei allerdings der Mittelpunkt der Gangpolkurve M_G dar, wenn er innerhalb dieses Feldes liegt [Bilder 4.17 (S. 101) und 4.18 (S. 102)]. Seine Bahn ist eine i_Z mal durchlaufene Kreisbahn. Grenzt das durch eine Übergangskurve $k_{ü}$ begrenzte Feld ans Unendliche [Bilder 4.16 (S. 100) und 4.19 (S. 103)], so erzeugen alle unendlich weit vom Mittelpunkt M_G der Gangpolkurve entfernt liegende Punkte ebenfalls i_Z mal durchlaufene Kreisbahnen, da sie ja wegen der zweifachen Erzeugung der Trochoiden (Kap. 4.4) Ersatzgetriebe der erstgenannten Ausnahmen darstellen. Anhand von Bild 4.16 (S. 100) läßt sich dieser Grenzübergang verdeutlichen: Wenn der Abstand des Punktes K_3 vom Punkt M_G wächst, werden die Schlingen der Bahn k_{K3} immer größer, bis sie beim Grenzübergang die Kurve k_{K3} vollständig ausfüllen, die dann nur noch aus i_Z (drei) übereinander liegenden kreisrunden Schlingen besteht.



Legende:

o : Selbstberührungspunkte

K... : Punkte; k... : Kurven, Bahnen; $k_{K...}$: Bahnen der Punkte K...

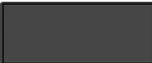
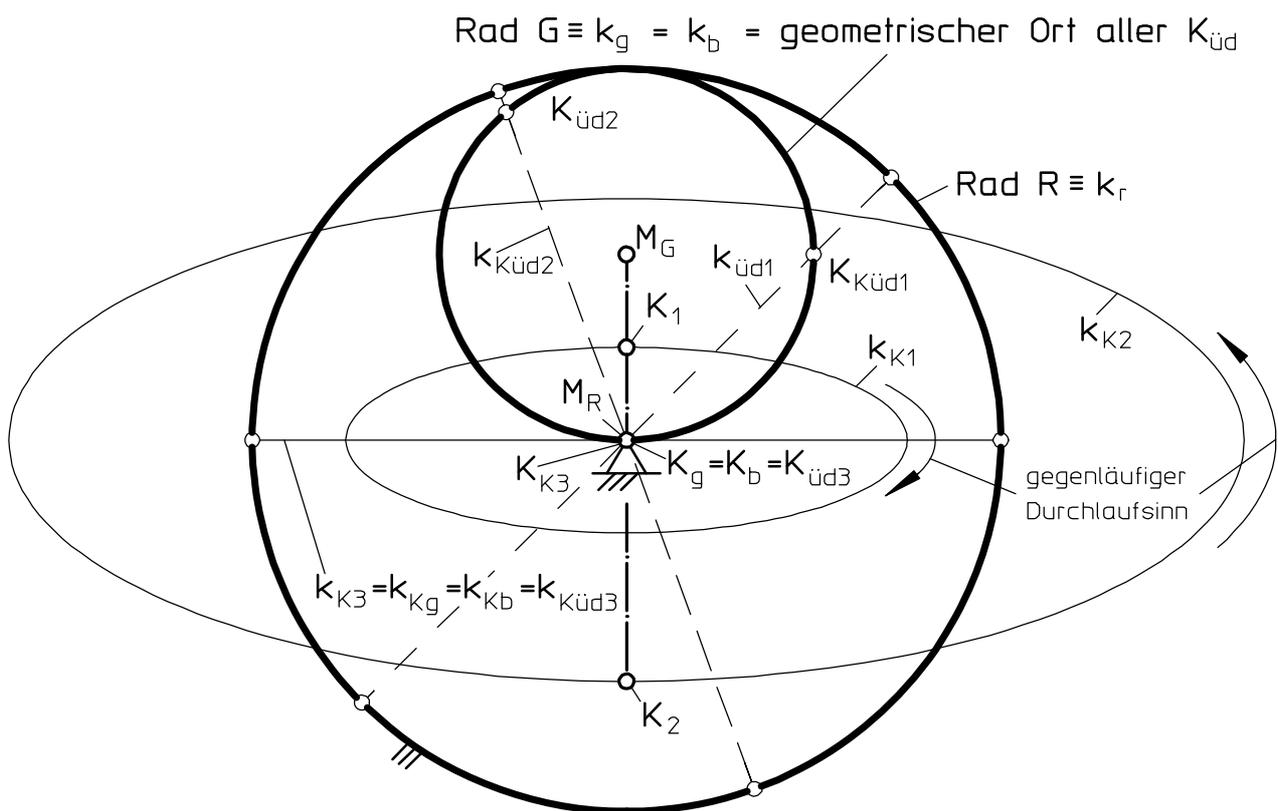
Feld	Anzahl Selbstschnittpunkte	Anzahl Wendepunkte
	Maximal mögliche Anzahl (n_{Smax})	0
	Abhängig von Übergangskurve (n_S)	0
	Minimal mögliche Anzahl (n_{S0})	$2 \cdot i_z$ oder 0

Bild 4.21: Feldeinteilung durch die Gangpolkurve k_g und durch Übergangskurven $k_{\ddot{u}i}$ bei Getrieben zum Erzeugen von Epitrochoiden
(Vollständiger Verlauf der Übergangskurven $k_{k\ddot{u}i}$ siehe Bilder 4.6 bis 4.8)

Einen Grenzfall stellt das Getriebe zum Erzeugen von Hypotrochoiden mit der Standgetriebeübersetzung $i = -2$ dar (Bild 4.22), für das nach Gleichung (4.5) $m = -1$ ist. Es handelt sich hierbei um das Kardanräderpaar. Aus Gleichung (4.86) folgt, daß somit der Radius der BALLSchen Kurve k_b identisch mit dem Radius der Gangpolkurve k_g ist. Dies wird dadurch bestätigt, daß alle Punkte auf der Gangpolkurve eine Gerade (k_{Kg}) erzeugen (, deren Endpunkte auf der Rastpolkurve k_r liegen). Die Bahnen (k_{Kg}) dieser Punkte weisen also die Eigenschaften eines BALLSchen Punktes, einen unendlich großen Krümmungsradius zu besitzen, in jeder Lage auf. Sie besitzen außerdem zwei Spitzen, da die Gangpolkurve zwei Mal auf der Rastpolkurve k_r umläuft und somit aus zwei kreisförmigen „Ästen“ besteht. Das Feld zwischen BALLScher Kurve k_b und Gangpolkurve k_g , das Punkte aufweist, die Trochoiden mit Wendepunkten erzeugen, verschwindet, weil beide Kurven identisch sind. Dies wird dadurch bestätigt, daß alle von diesem Getriebe erzeugten Trochoiden (z. B. k_{K1} , k_{K2}) Ellipsen bzw. deren Sonderformen Kreise oder Geraden darstellen und somit keine Wendepunkte aufweisen.



Legende: $K_{...}$: Punkte; $k_{...}$: Kurven, Bahnen; $k_{K_{...}}$: Bahnen der Punkte $K_{...}$

Bild 4.22: Das Kardankreispaar als Basis eines Getriebes mit der Standgetriebe-Übersetzung $-2/1$ zum Erzeugen von Hypotrochoiden (k_{K1} , k_{K2} , k_{K3} , $k_{Küd1}$, $k_{Küd2}$)

Aus den Ungleichungen (4.94) und (4.95) folgt weiterhin für das Kardanräderpaar mit $r_R = -2 \cdot r_G$, daß $|r_G| \leq r_{\ddot{u}} \leq |-r_G|$ bzw. daß $|-r_G| \geq r_{\ddot{u}} \geq |r_G|$ ist. Das bedeutet: wenn eine Übergangskurve existiert, ist diese identisch mit der Gangpolkurve. Tatsächlich stellen alle Bahnen von Punkten über der Gangpolkurve hin und zurück durchfahrene Geraden ($k_{K_{\ddot{u}d_i}}$, $i=1 \dots \infty$) und somit sich ständig selbst berührende Kurven dar. Bei derart durchlaufenen Bahnen handelt es sich allerdings um Dauer-Selbstberührungskurven, und diese werden durch Dauer-Übergangskurvenpunkte $K_{\ddot{u}d}$ erzeugt (vgl. Abschnitt 2.5.3.2). Beim Kardanräderpaar liegt also der Grenzfall vor, daß alle Dauer-Übergangskurvenpunkte $K_{\ddot{u}d}$ gemeinsam eine geschlossene Kurve bilden (Bild 4.22). Diese geschlossene Kurve ist jedoch nicht mit einer Übergangskurve zu verwechseln, die ja eine Folge aller Punkte darstellt, die nacheinander - und nicht gleichzeitig - einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchlaufen.

Beim Kardanräderpaar liegt noch ein weiterer Grenzfall vor: Die maximale Anzahl n_{Smax} an Selbstberührungspunkten ist 0 und nicht 2, wie Gleichung (4.100) - mit $n_{S0} = 0$, $\max(n_i) = 0$ und $i_z = -2$ erwarten läßt. Das bedeutet, daß Punkte verschiedener Seiten der Gangpolkurve Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten - nämlich 0 - erzeugen. Durch Vergleich mit anderen Getrieben, die Dauer-Übergangskurvenpunkte im gemeinsamen Punkt von 2 Ästen der Gangpolkurve besitzen, läßt sich dieses Phänomen erklären: Bei der Kurbelschwinge in Bild 1.3 (Seite 5) liegt der Dauer-Übergangskurvenpunkt B im Schnittpunkt von 2 Gangpolkurvenästen. Die Felder links und rechts vom Dauer-Übergangskurvenpunkt B weisen Punkte auf, deren Bahnen keine Selbstschnittpunkte besitzen, aber in unterschiedlichen Durchlaufrichtungen durchfahren werden - analog zu den vom Kardanräderpaar erzeugten Ellipsen: Die Ellipsen, die von Punkten innerhalb der Gangpolkurve erzeugt werden, weisen einen anderen Durchlaufsinne auf als diejenigen von Punkten außerhalb der Gangpolkurve (vgl. Bild 4.22). Beim Kardanräderpaar wird der „Ast“ der Gangpolkurve während einer Periode zweifach durchlaufen, was einem Übereinanderliegen der beiden Äste der Gangpolkurve der Kurbelschwinge in Bild 1.3 (Seite 5) entsprechen würde. Durch das Übereinanderliegen würden die beiden Felder, deren Punkte Bahnen ohne Selbstschnittpunkte erzeugen, auch eine gemeinsame Grenze aufweisen - nämlich die übereinander liegenden Äste der Gangpolkurve.

Die beiden „Äste“ der Gangpolkurve k_g verursachen bei dem Kardanräderpaar also jeweils einen Selbstschnittpunkt! Daß sich beide Wirkungen nicht addieren sondern gegenseitig aufheben, läßt sich ebenfalls folgendermaßen erklären:

- Ist der Betrag der Standgetriebeübersetzung i kleiner als 2, so entstehen keine Hypotrochoidenschnittpunkte, wenn die erzeugenden Punkte innerhalb von k_g liegen.
- Ist der Betrag der Standgetriebeübersetzung i jedoch größer als 2, so entstehen keine Hypotrochoidenschnittpunkte, wenn die erzeugenden Punkte außerhalb von k_g liegen.

Es ist also naheliegend, daß Punkte innerhalb und außerhalb der Gangpolkurve von Getrieben mit der Standgetriebeübersetzung $|i| = 2$ Hypotrochoiden (Ellipsen) ohne Selbstschnittpunkte erzeugen. Das Ersatzgetriebe des Kardanrädernetriebes mit seiner Standgetriebeübersetzung von $i_z/i_N = -2/1$ ist folgerichtig wieder ein Kardanrädernetriebe [vgl. Gl. (4.92): $i_z = i_z'$ und Gl. (4.93): $i_N' = -(i_N + i_z)$].

5 Ermitteln der Übergangskurve

5.1 Die Übergangskurve der viergliedrigen Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken

5.1.1 Stand der Technik

Wie schon in Kapitel 1.1 erwähnt, gibt es zwei Ansätze zum Ermitteln der Übergangskurve.

- R. MÜLLER veröffentlichte 1901 eine zeichnerische Methode zum Ermitteln aller Übergangskurvenpunkte (, d. h. Punkte der Koppalebene, die Bahnen mit Selbstberührungspunkten beschreiben) von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken [2], die zu einer Getriebebelage gehören. Ohne den gesamten Verlauf der Übergangskurve zeigen zu können, diskutierte er die Eigenschaften dieser Übergangskurve.
- B. DIZIOĞLU stellte 1987 ein mit Hilfe von numerischen Methoden lösbares Gleichungssystem zum Ermitteln der Übergangskurvenpunkte eines gleichschenkelig symmetrischen Gelenkgetriebes vor [4]. Anhand dieser Übergangskurvenpunkte konnte er den kompletten Verlauf der Übergangskurve dieses speziellen Getriebes aufzeigen.

5.1.1.1 Zeichnerische Methode zum Ermitteln von Übergangskurvenpunkten viergliedriger Gelenkgetriebe

R. MÜLLER entwickelte 1901 eine Methode, die es erlaubt, alle Punkte $K_{\bar{u}}$ einer in einer vorgegebenen Lage befindlichen Koppalebene zu bestimmen, die momentan einen Selbstberührungspunkt ihrer Bahn durchlaufen, wenn die Koppel zu einem viergliedrigen ebenen Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken gehört.

Er geht bei der Herleitung davon aus, daß **ein** Selbstberührungspunkt $K_{\bar{u}}$ in der Koppalebene des Gelenkgetriebes A_0ABB_0 bekannt ist (Bild 5.1). Der Momentanpol P_{20} liegt bekannterweise im Schnittpunkt der Geraden durch A_0A mit der Geraden durch B_0B , der Hilfspol P_{31} im Schnittpunkt der Geraden durch A_0B_0 mit der Geraden durch AB .

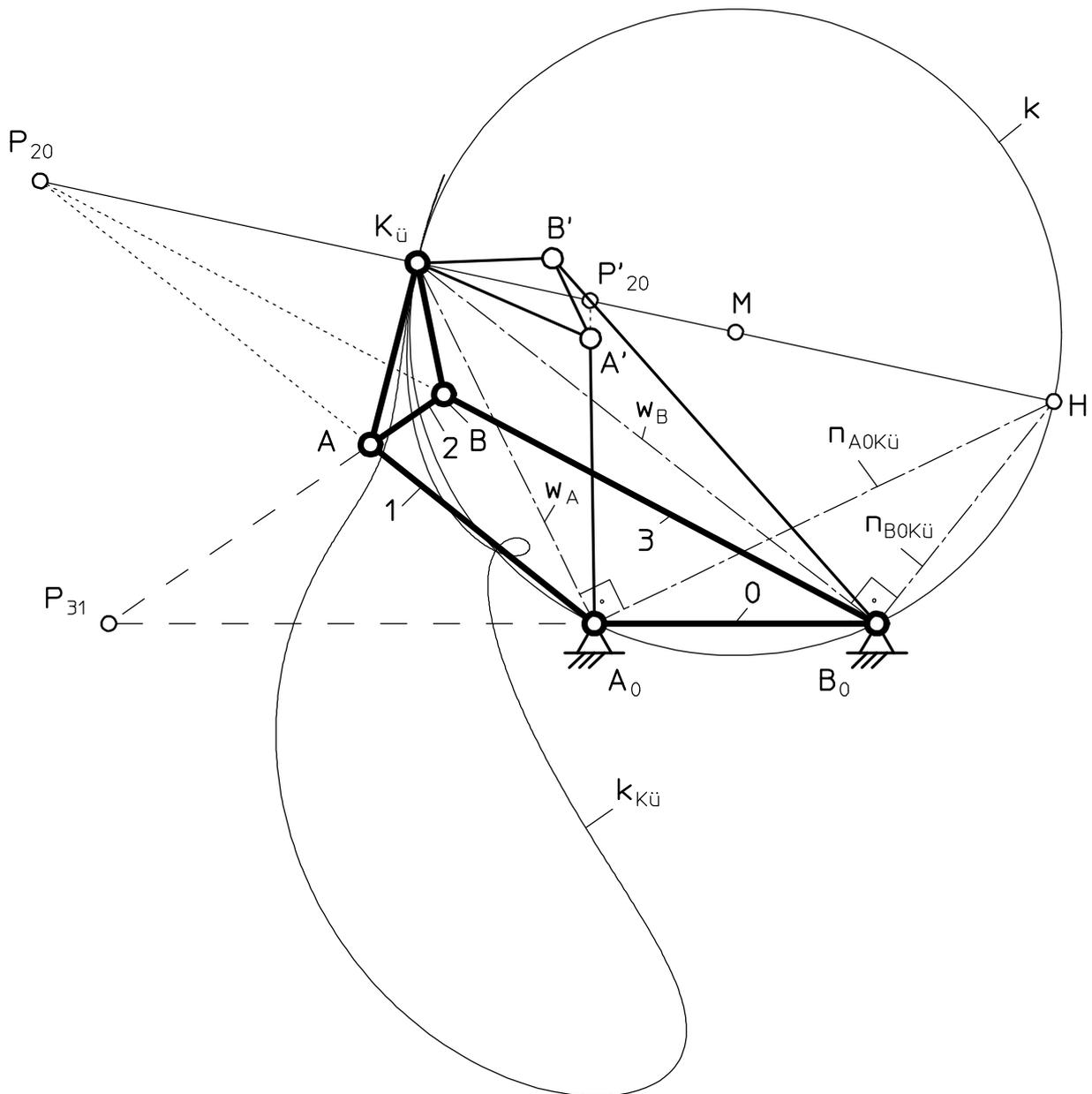


Bild 5.1: Die beiden zu einem Übergangskurvenpunkt gehörenden Lagen eines viergliedrigen Gelenkgetriebes

Zum Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ gehört noch eine zweite Lage des Getriebes, nämlich $A_0A'B'B_0$ mit dem Momentanpol P'_{20} . Die Geraden $P_{20}K_{\ddot{u}}$ und $P'_{20}K_{\ddot{u}}$ sind die Normalen der Bahn $k_{K_{\ddot{u}}}$ im Punkte $K_{\ddot{u}}$. Da der Punkt $K_{\ddot{u}}$ ein Selbstberührungspunkt ist und somit seine beiden Normalen identisch sind (vgl. Abschnitt 2.1.1), liegen die Punkte P_{20} , P'_{20} und $K_{\ddot{u}}$ auf einer Geraden. Die Gerade $A_0K_{\ddot{u}}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle A'A_0A$ (vgl. Abschnitt 2.2.1), und die Gerade $B_0K_{\ddot{u}}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle B'B_0B$.

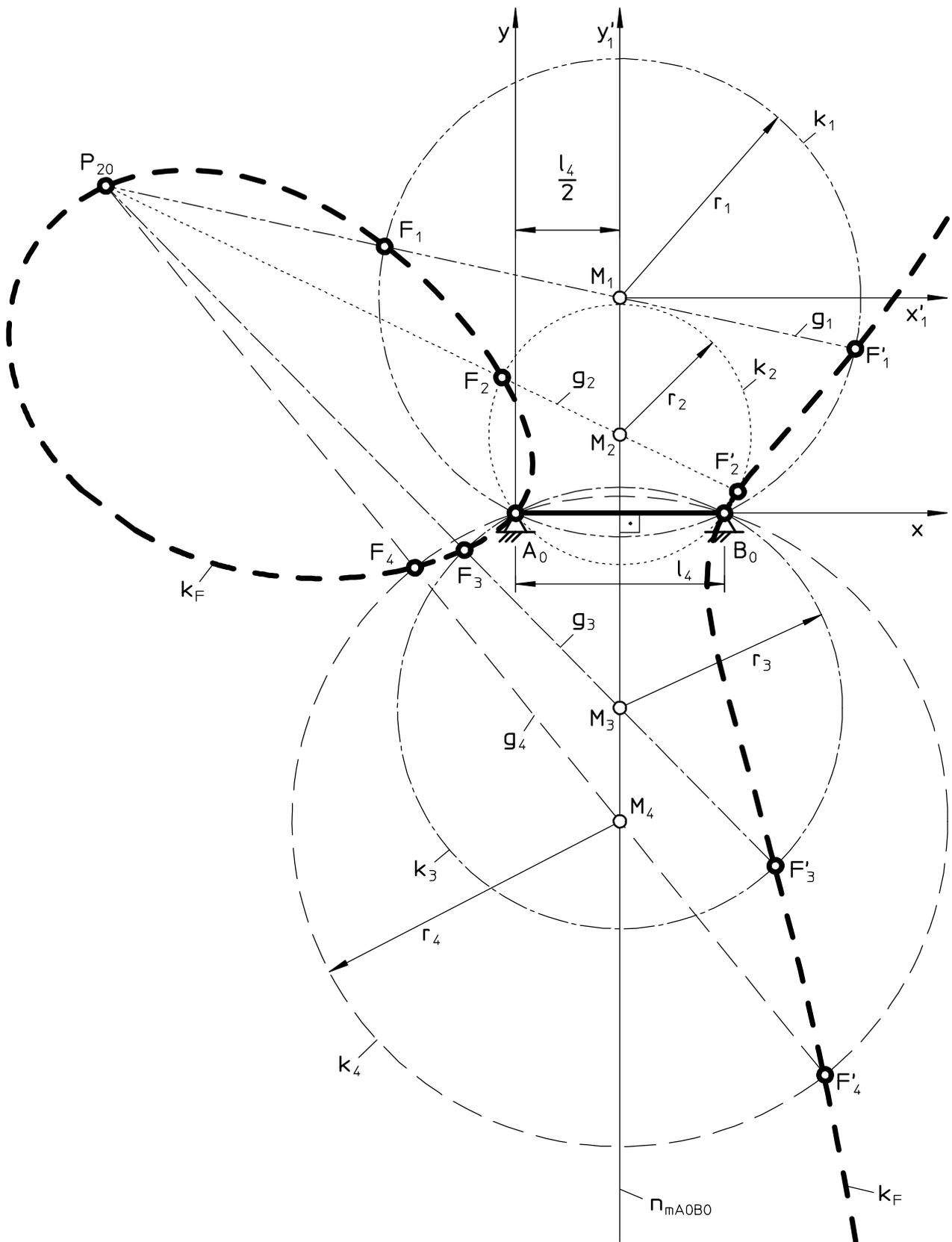


Bild 5.2: Konstruktion der Fokalkurve k_F

Die Normale $n_{A_0K_{\bar{u}}}$ auf der Strecke $\overline{A_0K_{\bar{u}}}$ im Gestellgelenk A_0 und die Normale $n_{B_0K_{\bar{u}}}$ auf der Strecke $\overline{B_0K_{\bar{u}}}$ im Gestellgelenk B_0 schneiden einander im Punkt H , der nach [2] der vierte Harmonische Punkt¹⁾ zu P_{20} , P'_{20} und $K_{\bar{u}}$ ist und mit diesen Punkten auf einer Geraden liegt. Die Punkte A_0 , B_0 , $K_{\bar{u}}$ und H liegen auf einem Kreis k , dessen Mittelpunkt M sich auf der Geraden $P_{20}P'_{20}$ befindet.

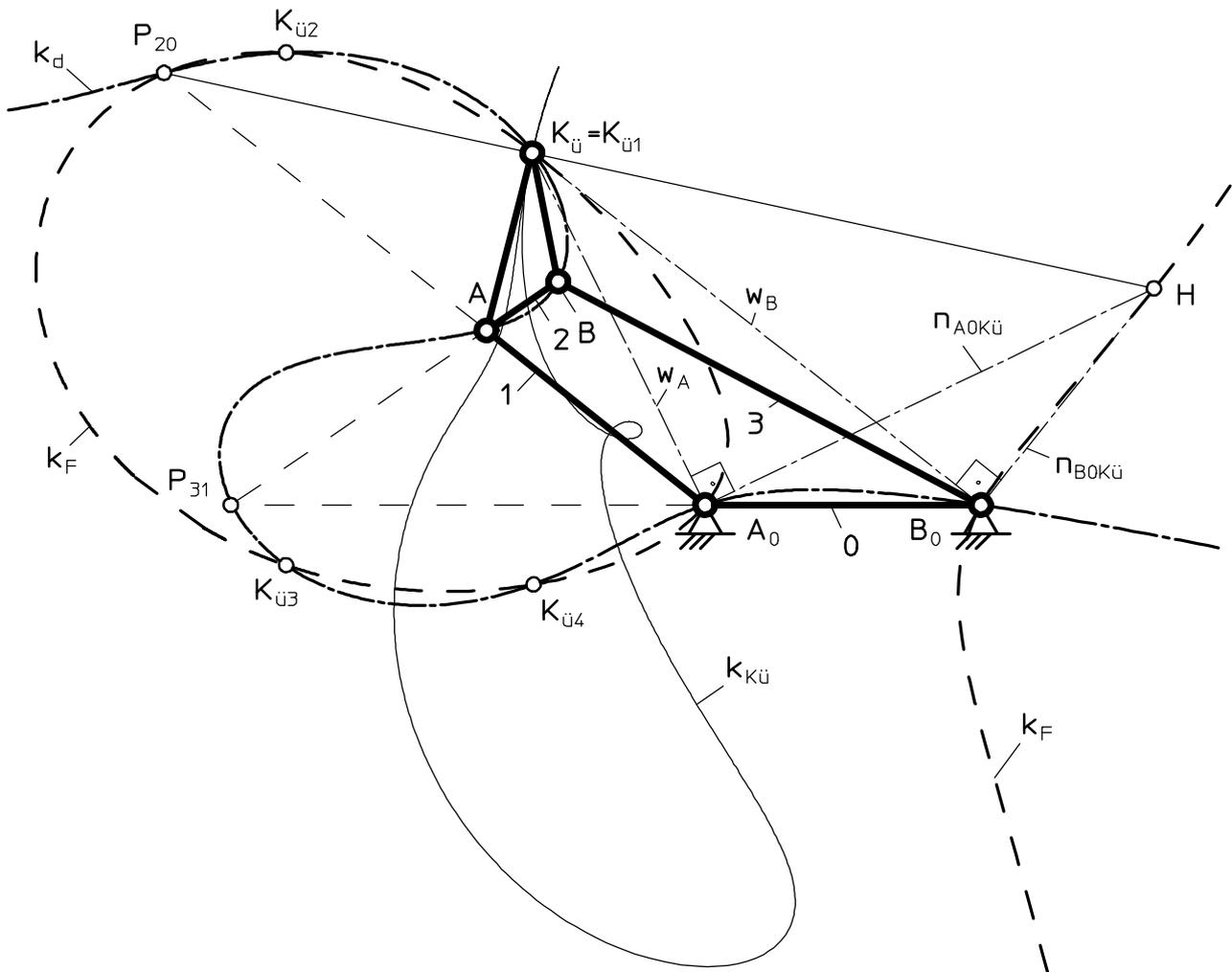
Ist der Kreis k durch die Gestellgelenke A_0 und B_0 sowie seinen Kreismittelpunkt M bekannt und wurde der Momentanpol P_{20} ebenfalls ermittelt, so liegen der Selbstberührungspunkt $K_{\bar{u}}$ und der Harmonische Punkt H also in den Schnittpunkten des Kreises k mit der Geraden durch den Kreismittelpunkt M und den Momentanpol P_{20} .

- Werden nun alle denkbaren Kreise k_i durch die Gestellgelenke A_0 und B_0 gezeichnet (Bild 5.2) - deren Mittelpunkte alle auf der Mittelsenkrechten $n_{m_{A_0B_0}}$ der Gestellgeraden A_0B_0 liegen - und wird durch jeden Kreismittelpunkt M_i eine Gerade g_i durch den Momentanpol P_{20} gezogen, so bilden die Schnittpunkte der Geraden g_i mit den jeweiligen Kreisen k_i die zweiteilige Fokalkurve k_F , die ein geometrischer Ort aller Selbstberührungspunkte ist, die momentan (in der dem Momentanpol P_{20} zugeordneten Lage des Getriebes) durchlaufen werden.
- Der 2. geometrische Ort aller Selbstberührungspunkte ist die Doppelpunktkurve bzw. die Drehpolkurve k_d als deren Transformation in die Gestellebene (Bild 5.3), in der ebenfalls die Fokalkurve k_F liegt. Beide sind der Ort aller Punkte von Koppelpunktbahnen, die in einer vorgegebenen Getriebestellung einen Doppelpunkt ihrer Bahn durchlaufen. Die Drehpolkurve k_d ist gleichzeitig - da sie aufgrund dieser Eigenschaft mit der 2. Fokalkurve von R. MÜLLER identisch ist - der „Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche die Seiten des Vierecks A_0ABB_0 berühren. Die Kurve k_d geht durch A_0 , B_0 , B , A , P_{20} und P_{31} “ [2].

„Die Kurven k_F und k_d haben außer P_{20} , A_0 , B_0 und den imaginären Kreispunkten noch vier Punkte einander gemein: für jede Koppellage gibt es also im allgemeinen vier Systempunkte, die sich augenblicklich in einem Selbstberührungspunkt ihrer Bahn befinden“ [2]. R. MÜLLER hat die in Bild 5.3 gezeigten vier Selbstberührungspunkte $K_{\bar{u}}$, $K_{\bar{u}2}$, $K_{\bar{u}3}$ und $K_{\bar{u}4}$ eines totalschwingfähigen Getriebes ermittelt, aber das Verfahren war zu aufwendig, um (ohne Rechner) den Verlauf einer Übergangskurve zu bestimmen. Deshalb wurde dieses Verfahren bisher noch nie dazu benutzt, eine Übergangskurve zu ermitteln.

¹⁾ Eine harmonische Teilung einer Strecke durch die vier Punkte P_{20} , $K_{\bar{u}}$, P'_{20} und H (Bild 5.1) liegt vor, wenn gilt:

$$\frac{\overline{P_{20}K_{\bar{u}}}}{\overline{P'_{20}K_{\bar{u}}}} = \frac{\overline{P_{20}H}}{\overline{P'_{20}H}} \quad [25].$$



Lengende: (Gelenkpunkte A_0 und B_0 und Momentanpol P_{20} sind keine Übergangskurvenpunkte, daher gibt es nur $i = 1 \dots 4$ Übergangskurvenpunkte $K_{üi}$)

Bild 5.3: Schnittpunkte $K_{üi}$ zwischen Fokalkurve k_F und Drehpolkurve k_d

5.1.2 Zeichnungsfolge-Rechenverfahren zum Ermitteln von Selbstberührungspunkten viergliedriger Gelenkgetriebe

Die in [2] beschriebenen Erkenntnisse über die Eigenschaften von Selbstberührungspunkten der Koppelpunktbahnen viergliedriger ebener Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken lassen sich in ein Zeichnungsfolge-Rechenverfahren überführen [26]. Hierzu werden die Schnittpunkte zwischen Drehpolkurve k_d und Fokalkurve k_F ermittelt.

5.1.2.1 Das Ermitteln der Drehpolkurve viergliedriger Gelenkgetriebe

Wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, liegt ein Doppelpunkt im Schnittpunkt D (Bild 2.2, S. 11)

- der Winkelhalbierenden w_A des durch die beiden Lagen des Gliedes 1 aufgespannten Winkels $\sphericalangle A'A_0A$ mit
- der Winkelhalbierenden w_B des durch die beiden Lagen des Gliedes 3 aufgespannten Winkels $\sphericalangle B'B_0B$.

Mit diesem Wissen ist die Drehpolkurve, die eine Folge aller Doppelpunkte einer Getriebebestellung in der Gestellebene ist, leicht konstruierbar. Für die Bestimmung der benötigten Doppelpunkte wird ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, dessen Nullpunkt im Gestellgelenk A_0 liegt.

Ist der Antriebswinkel φ_g für eine vorgegebene Lage des Getriebes sowie ein weiterer Antriebswinkel φ für die eindeutige Beschreibung eines Koppelpunktbahn-Doppelpunktes gegeben (Bild 2.2, S. 11), so lautet die Gleichung für die Steigung der Winkelhalbierenden w_A

$$m_{wA} = \tan\left(\frac{\varphi_g + \varphi}{2}\right) . \quad (5.1)$$

Mit Hilfe der Abtriebswinkel $\psi_g = \psi_g(\varphi_g)$ und $\psi = \psi(\varphi)$ folgt für die Steigung der Winkelhalbierenden w_B

$$m_{wB} = \tan\left(\frac{\psi_g + \psi}{2}\right) . \quad (5.2)$$

Mit Hilfe der Gliedlänge l_4 des Gestells $4 \equiv 0$ kann der Ordinatenschnittpunkt

$$b_{wB} = -l_4 \cdot m_{wB} \quad (5.3)$$

für die Geradengleichung der Winkelhalbierenden w_B in der kartesischen Normalform

$$y = m_{wB} \cdot x + b_{wB} \quad (5.4)$$

ermittelt werden. Damit folgt nach [25] für die Koordinaten des Schnittpunkts zwischen den Winkelhalbierenden w_A und w_B - und somit für die Koordinaten des jeweiligen Koppelpunktbahn-Doppelpunktes D in der Gestellebene des Getriebes - unter Berücksichtigung von $b_{wA} = 0$

$$x_D = \frac{-b_{wB}}{(m_{wB} - m_{wA})} \quad \text{und} \quad (5.5)$$

$$y_D = m_{wB} \cdot x_D + b_{wB} . \quad (5.6)$$

Durch Variation des Winkels φ in den durch eine Bewegungsperiode gegebenen Grenzen lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (5.5) und (5.6) alle Punkte einer Drehpolkurve berechnen.

5.1.2.2 Das Ermitteln der Fokalkurve

Die Fokalkurve ist nach [2] immer zweiteilig. Ihre Punkte lassen sich konstruieren, indem die Schnittpunkte

- eines Kreises k_i (Bild 5.2, S. 112) durch die Punkte A_0 und B_0 mit
- einer Geraden g_{MiP20} durch den Kreismittelpunkt M_i des Kreises k_i und den Momentanpol P_{20}

in einer vorgegebenen Getriebestellung ermittelt werden. Die Folge aller derart ermittelten Schnittpunkte, die durch die Variation des Kreises k_i entstehen, bilden die Fokalkurve k_F (vgl. Abschnitt 5.1.1.1).

Da alle Kreismittelpunkte M_i auf der Mittelsenkrechten $n_{m_{A_0B_0}}$ der Strecke $\overline{A_0B_0}$ liegen, kann der Radius r_i des Kreises k_i mit dem pythagoreischen Lehrsatz

$$r_i = \sqrt{\left(\frac{l_4}{2}\right)^2 + (y_{M_i})^2} \quad (5.7)$$

bestimmt werden. Die Gerade g_{MiP20} durch dem Momentanpol P_{20} und den jeweiligen Kreismittelpunkt M_i weist die Steigung

$$m_{MiP20} = \frac{y_{P20} - y_{M_i}}{x_{P20} - x_{M_i}} \quad (5.8)$$

auf. Zur einfacheren Berechnung des Schnittpunktes der Geraden g_{MiP20} mit dem Kreis k_i wird ein zum gestellfesten Koordinatensystem paralleles Koordinatensystem x'_i, y'_i eingeführt, dessen Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Kreises M_i gelegt wird. (In Bild 5.2, S. 112, ist das verschobene Koordinatensystem $x'_i, y'_i = x'_1, y'_1$ des Kreismittelpunktes $M_i = M_1$ eingezeichnet.) Da die Gerade g_{MiP20} durch den Ursprung des Koordinatensystems x'_i, y'_i verläuft, ist ihr Ordinatenabschnitt $b'_{MiP20} = 0$. Durch Einsetzen der daraus resultierenden Geradengleichung für die Gerade g_{MiP20}

$$y'_i = x'_i \cdot m_{MiP20} \quad (5.9)$$

in die Kreisgleichung des Kreises k_i

$$x'_i = \pm \sqrt{r_i^2 - y_i'^2} \quad (5.10)$$

folgt für die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden g_{MiP20} mit dem Kreis k_i nach wenigen Umformungen

$$x'_{i/2} = \pm r_i \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + m_{MiP20}^2)}} \quad (5.11)$$

Die Gleichungen für die Koordinatentransformation des Koordinatensystems x'_i, y'_i in das gestellfeste Koordinatensystem x, y lauten:

$$x = x_i' + \frac{l_4}{2} \quad \text{und} \quad (5.12)$$

$$y = y_i' + y_{Mi} \quad (5.13)$$

Für die Schnittpunktkoordinaten und somit für die Fokalkurvenpunkte dieser Getriebe- lage in der Gestellebene folgt durch Einsetzen von Gleichung (5.11) in Gleichung (5.12)

$$x_{1/2} = \pm r_i \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + m_{MiP20}^2\right)}} + \frac{l_4}{2} \quad (5.14)$$

sowie durch Einsetzen der nach x_i' umgestellten Gleichung (5.12) in Gleichung (5.9) und des Ergebnisses wiederum in Gleichung (5.13)

$$y_1 = \left(x_1 - \frac{l_4}{2}\right) \cdot m_{MiP20} + y_{Mi} \quad \text{und} \quad (5.15)$$

$$y_2 = \left(x_2 - \frac{l_4}{2}\right) \cdot m_{MiP20} + y_{Mi} \quad (5.16)$$

Eine vollständige Punktefolge der Fokalkurve k_F ist ermittelbar, wenn für y_{Mi} z. B. Werte zwischen minus Unendlich und plus Unendlich in aufsteigender Reihenfolge eingesetzt werden.

5.1.2.3 Das Ermitteln von Schnittpunkten zwischen zwei durch Punktefolgen gegebenen Kurven

Drehpolkurve und Fokalkurve können jetzt mit Hilfe der in den Abschnitten 5.1.2.1 und 5.1.2.2 hergeleiteten Algorithmen als Punktefolge ermittelt werden. Zur Berechnung der Schnittpunkte zwischen diesen Kurven ist es notwendig, den Verlauf zwischen den Punkten der Punktefolgen zu approximieren. Das einfachste Verfahren hierfür ist die Approximation durch eine Gerade zwischen je zwei benachbarten Punkten.

Die Geradenapproximation hat

- den Nachteil, daß der Abstand zwischen den Punkten einer Punktefolge relativ klein gewählt werden muß, damit der Abstand zwischen tatsächlichem Kurvenverlauf und den approximierenden Strecken gering ausfällt, und sie hat
- den Vorteil, daß die Approximation sehr einfach, immer möglich und immer vorhersehbar ist, was z. B. für eine Splineapproximation nicht immer zutrifft (Bild 5.4).

Aufgrund der hohen Anzahl an Stützstellen ist es jedoch nicht sinnvoll, für jede bei der Approximation verwendete Strecke zwischen zwei benachbarten Punkten zu ermitteln, ob sie einen Schnittpunkt mit einer beliebigen anderen für die Approximation verwendeten Strecke aufweist, da bei n verwendeten Strecken $n \cdot (n - 1)$ Überprüfungen stattzufinden hätten.

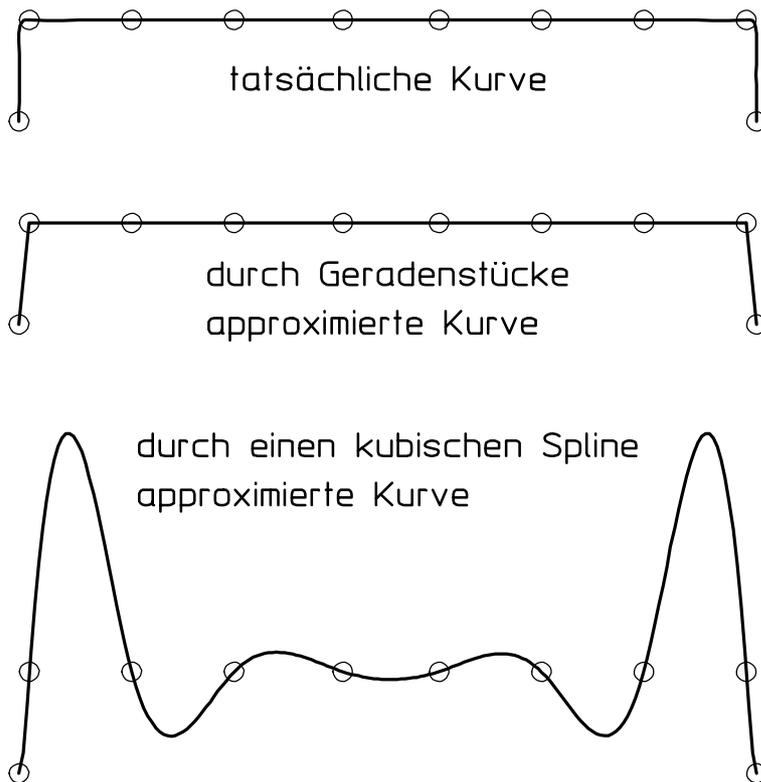


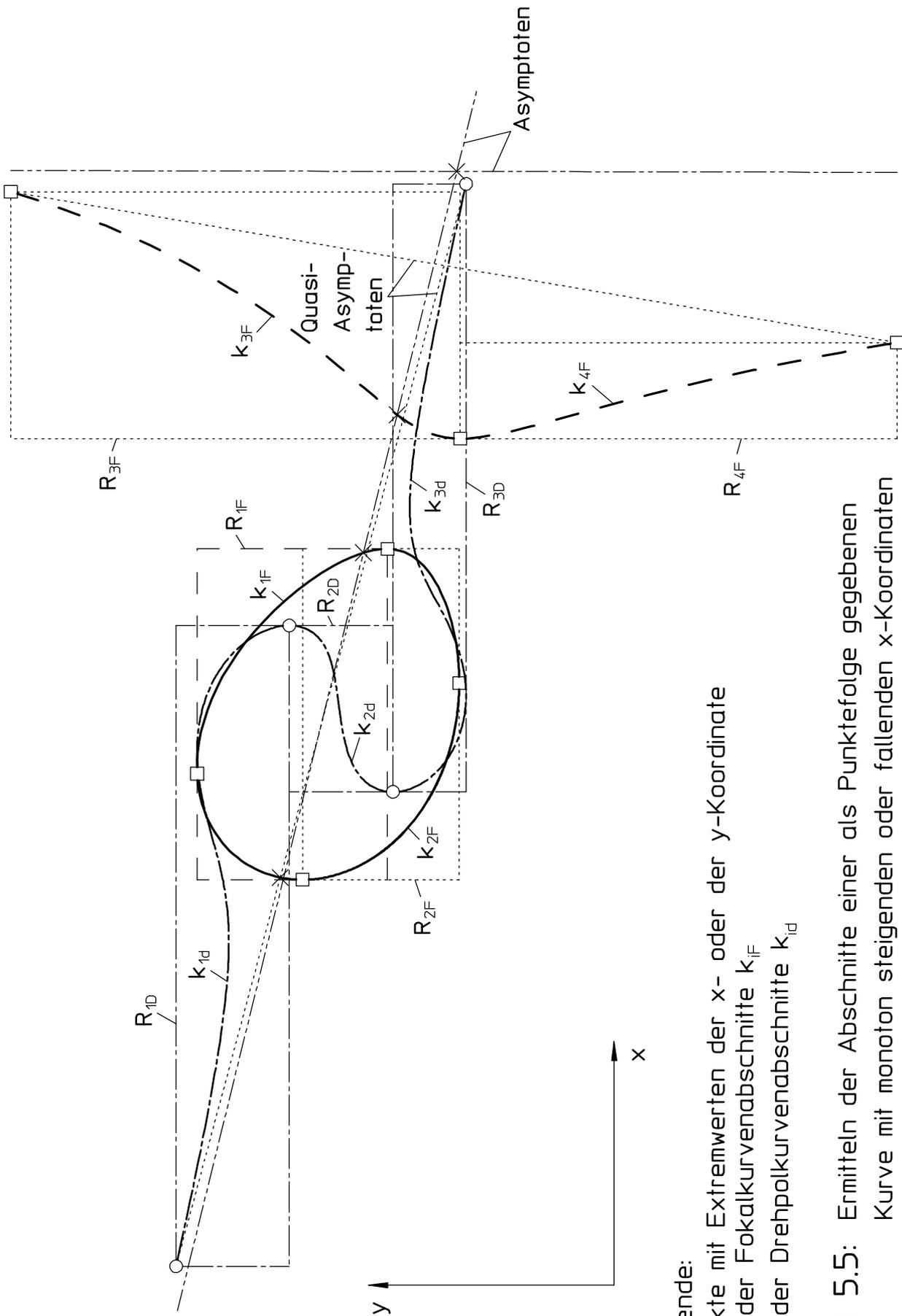
Bild 5.4: Approximationen einer als Punktefolge gegebenen Kurve

Die Anzahl der Strecken, die einander schneiden können, lässt sich jedoch auf einfache Weise reduzieren. Hierzu werden die Kurven in Abschnitte mit steigenden und fallenden x -Koordinaten eingeteilt und dabei gleichzeitig die Maxima und die Minima der x - und y -Koordinaten eines jeden Abschnitts erfasst.

In Bild 5.5 wird demnach die zweiteilige Fokalkurve k_F aus Bild 5.3 (S. 114) in die vier Abschnitte k_{1F} bis k_{4F} und die Drehpolkurve k_d in die drei Abschnitte k_{1d} bis k_{3d} unterteilt.

Wird jeder Abschnitt mit einem Rechteck R_{iF} bzw. R_{id} umrahmt, dessen Eckpunkte durch die schon ermittelten Extremwerte für die gleichnamigen Endpunkte (R_{iF} ; R_{id}) der Kurvenabschnitte festgelegt sind, so können nur zwischen denjenigen Abschnitten Schnittpunkte auftreten, deren Rechtecke einander überlappen. In Bild 5.5 können also keine Schnittpunkte zwischen den Abschnitten k_{1F} und k_{3d} , k_{2F} und k_{1d} , k_{3F} und k_{1d} bzw. k_{2d} sowie zwischen k_{F4} und k_{1d} bzw. k_{2d} auftreten.

Der Rechner würde allerdings auch die vier im Bild durch Kreuzchen gekennzeichneten Schnittpunkte zwischen den Asymptoten der Drehpolkurve k_d und der Fokalkurve k_F sowie zwischen den Asymptoten der Drehpolkurve k_d und den beiden Ästen der Fokalkurve k_F ermitteln, wenn dies nicht verhindert wird. Um Schnittpunkte mit Asymptoten zu unterbinden, müssen diese vom Rechner erkannt werden. Mathematisch exakte Asymptoten von Kurven können nicht ermittelt werden, wenn ausschließlich eine Punktefolge der



Legende:

Punkte mit Extremwerten der x- oder der y-Koordinate

□ : der Fokalkurvenabschnitte k_{iF}

○ : der Drehpolkurvenabschnitte k_{id}

Bild 5.5: Ermitteln der Abschnitte einer als Punktefolge gegebenen Kurve mit monoton steigenden oder fallenden x-Koordinaten

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

Kurve bekannt ist. Ersatzweise wird statt dessen die Strecke zwischen den Kurvenpunkten verwendet, die den geringsten Abstand zu den im Unendlichen liegenden Punkten der Kurve aufweisen. Diese Verbindungslinie wird im folgenden Quasi-Asymptote genannt.

- Bis auf die (nahezu) senkrechten Quasi-Asymptoten (Bild 5.6) bilden alle Quasi-Asymptoten einen eigenen Abschnitt mit fallenden bzw. mit steigenden x-Koordinaten, je nach Kurvenverlauf:
 - Bild 5.6 zeigt z. B. eine Kurve, die zwischen dem Anfangspunkt P_{i+1} und dem Punkt P_{ix} **steigende** x-Koordinaten aufweist. Zwischen den Punkten P_{ix} und P_{iy} befindet sich eine Quasi-Asymptote, die einen eigenen Abschnitt mit **fallenden** x-Koordinaten bildet. Der Punkt P_{iy} ist wiederum der Anfangspunkt eines Abschnitts mit **steigenden** x-Koordinaten.
 - (Wird die Kurve in Bild 5.6 rückwärts durchlaufen, so liegt zwischen den Punkten P_i und P_{iy} ein Abschnitt mit **fallenden** x-Koordinaten, es folgt die Quasi-Asymptote $P_{iy}P_{ix}$ als eigener Abschnitt mit **steigenden** x-Koordinaten, und anschließend folgt wiederum zwischen den Punkten P_{ix} und P_{i+1} ein Kurvenabschnitt mit **fallenden** x-Koordinaten.)

Alle nur aus einer Strecke bestehenden Abschnitte einer Kurve können also als Quasi-Asymptote deklariert und von dem Ermitteln der Schnittpunkte ausgeschlossen werden.

- Senkrechte Quasi-Asymptoten lassen sich nicht ohne Berechnungen ermitteln. Werden allerdings alle Winkel der für die Approximation einer Kurve verwendeten Strecken berechnet, so liegt eine nahezu senkrechte Quasi-Asymptote vor (Bild 5.6), wenn auf eine Strecke mit einem Winkel von nahezu 90° eine Strecke mit einem Winkel von nahezu -90° und dann wieder eine Strecke mit nahezu 90° folgt oder umgekehrt.
- Wird befürchtet, daß eine Strecke fälschlicherweise durch die geschilderten Kriterien als Quasi-Asymptote eingeordnet wird, so kann folgende Überprüfung zusätzlich stattfinden: Nur wenn die potentielle Quasi-Asymptote $\overline{P_i P_{i+1}}$ länger als ein gefordertes Mehrfaches (z. B. fünffaches) der Strecken $\overline{P_{i-2} P_{i-1}}$ und $\overline{P_{i+2} P_{i+3}}$ zwischen je zwei Bahnpunkten ist, die an die benachbarten Strecken der potentiellen Quasi-Asymptote anschließen, so handelt es sich wahrscheinlich um eine Quasi-Asymptote.

Die Vorgehensweise, wie Schnittpunkte zwischen in Frage kommenden Abschnitten von Kurven mit ausschließlich steigenden oder fallenden x-Koordinaten bekannter Kurvenpunkte zu ermitteln sind, soll anhand der Kurvenabschnitte k_{1d} und k_{1F} (Bild 5.5, S. 119) erläutert werden (Bild 5.7, S. 122).

In Bild 5.7 sind ganz wenige Punkte der Punktfolgen k_{1d} und k_{1F} markiert. Dem Rechner seien nur die markierten Punkte bekannt, und es sollen die Kurvenstücke zwischen den bekannten Punkten durch Strecken approximiert werden. Bei beiden Kurvenabschnitten beginnt die Schnittpunktsuche mit der Strecke, deren Endpunkte die jeweils kleinsten x-

Werte aufweisen. Diejenigen Kurvenabschnitte, die Punkte mit monoton fallenden x-Werten aufweisen, werden also rückwärts durchlaufen. Um die Beschreibung nicht zu kompliziert zu gestalten, wird jedoch in dem hier geschilderten Beispiel davon ausgegangen, daß beide Kurvenabschnitte aus Punkten mit steigenden x-Werten bestehen.

- (1) Für die Punkte der Kurve k_d wird ein Zähler i [siehe Flußdiagramm 5.1 (S. 123), in dem jedem Schritt links im Bild die in dieser Aufzählung verwendete Nummer zugeordnet ist] eingeführt, für die Punkte der Kurve k_F der Zähler k . Beide Zähler werden auf 1 gesetzt.

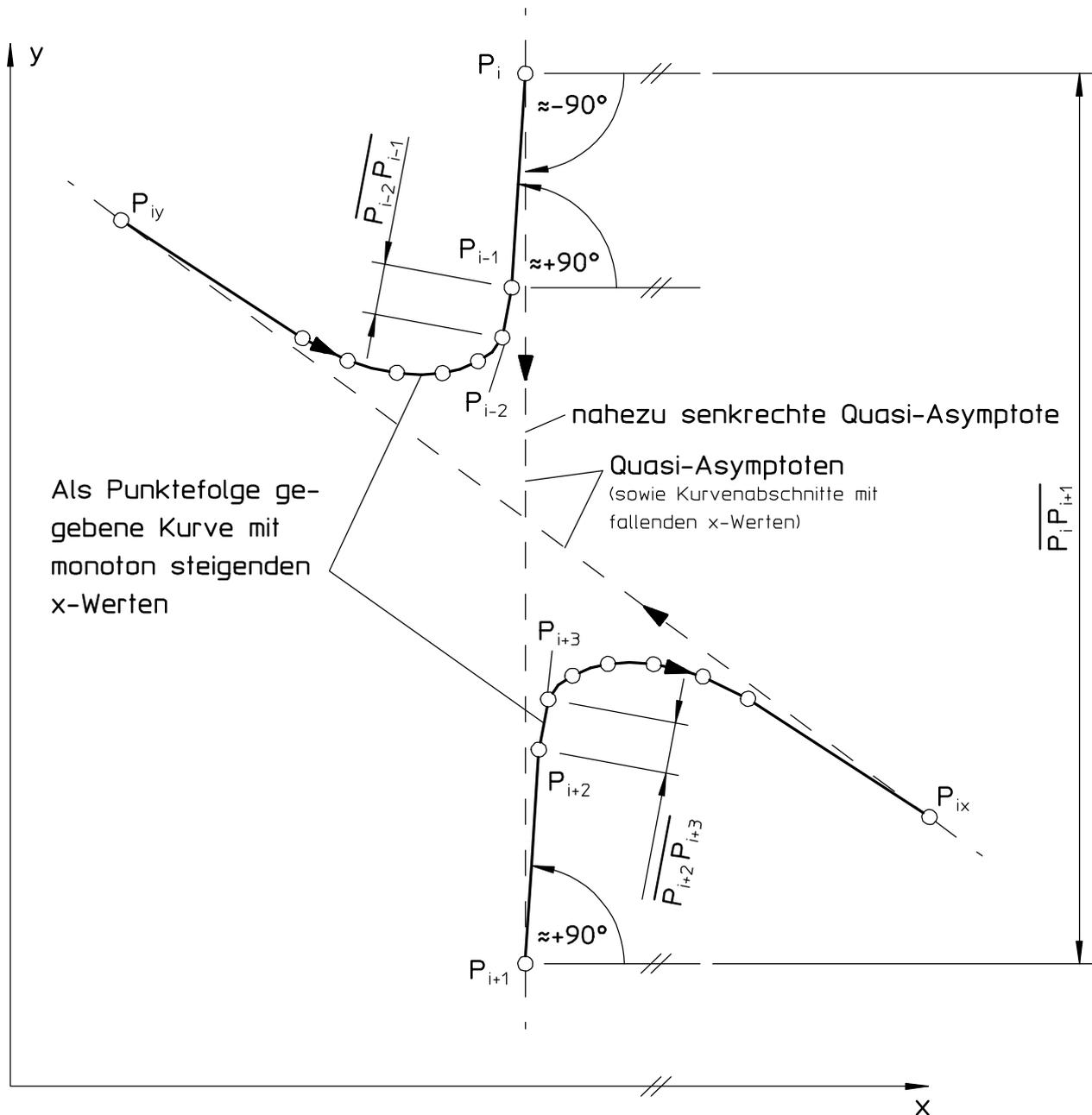


Bild 5.6: Verfahren zum Erkennen von Quasi-Asymptoten einer als Punktefolge gegebenen Kurve

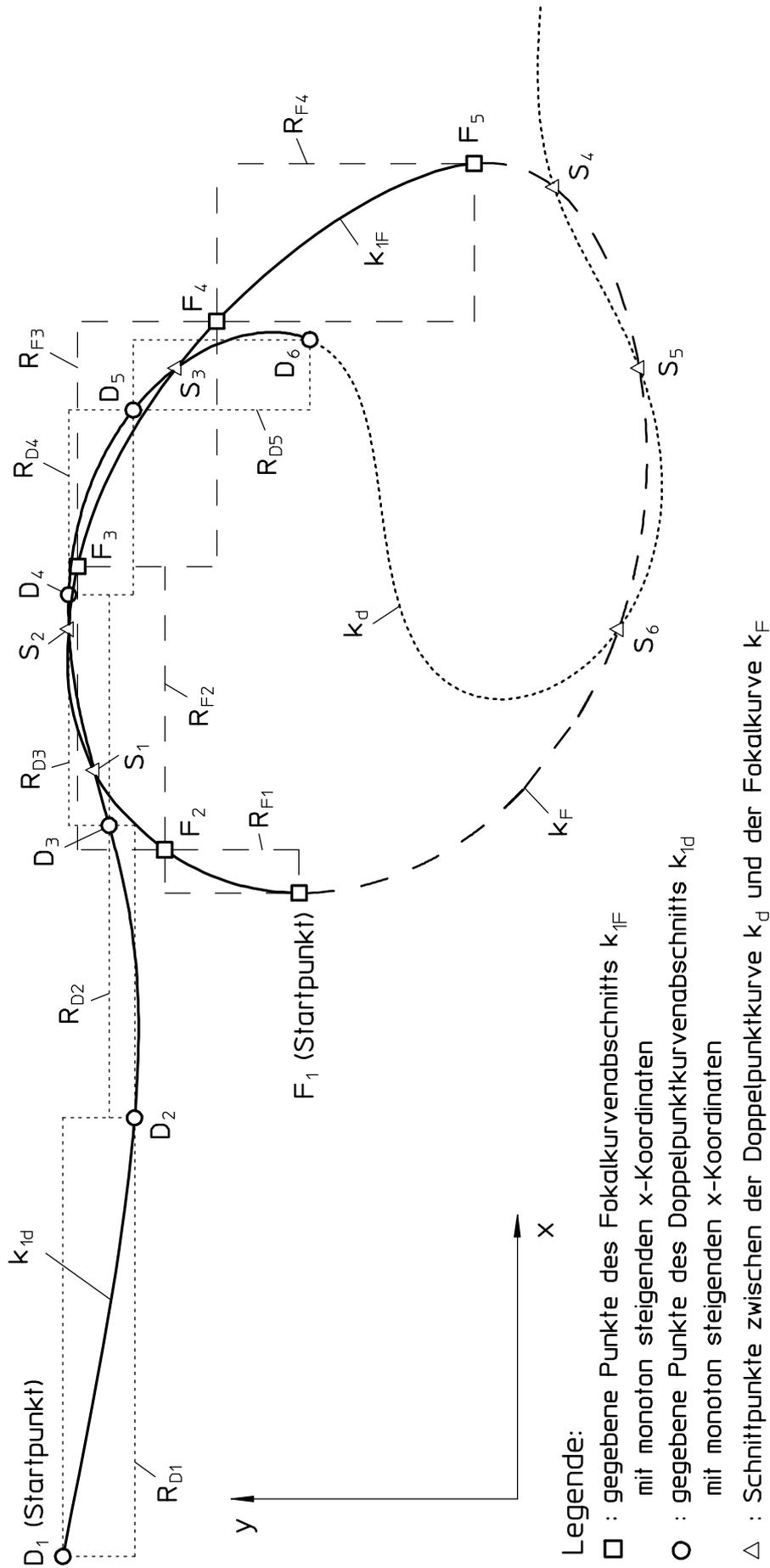
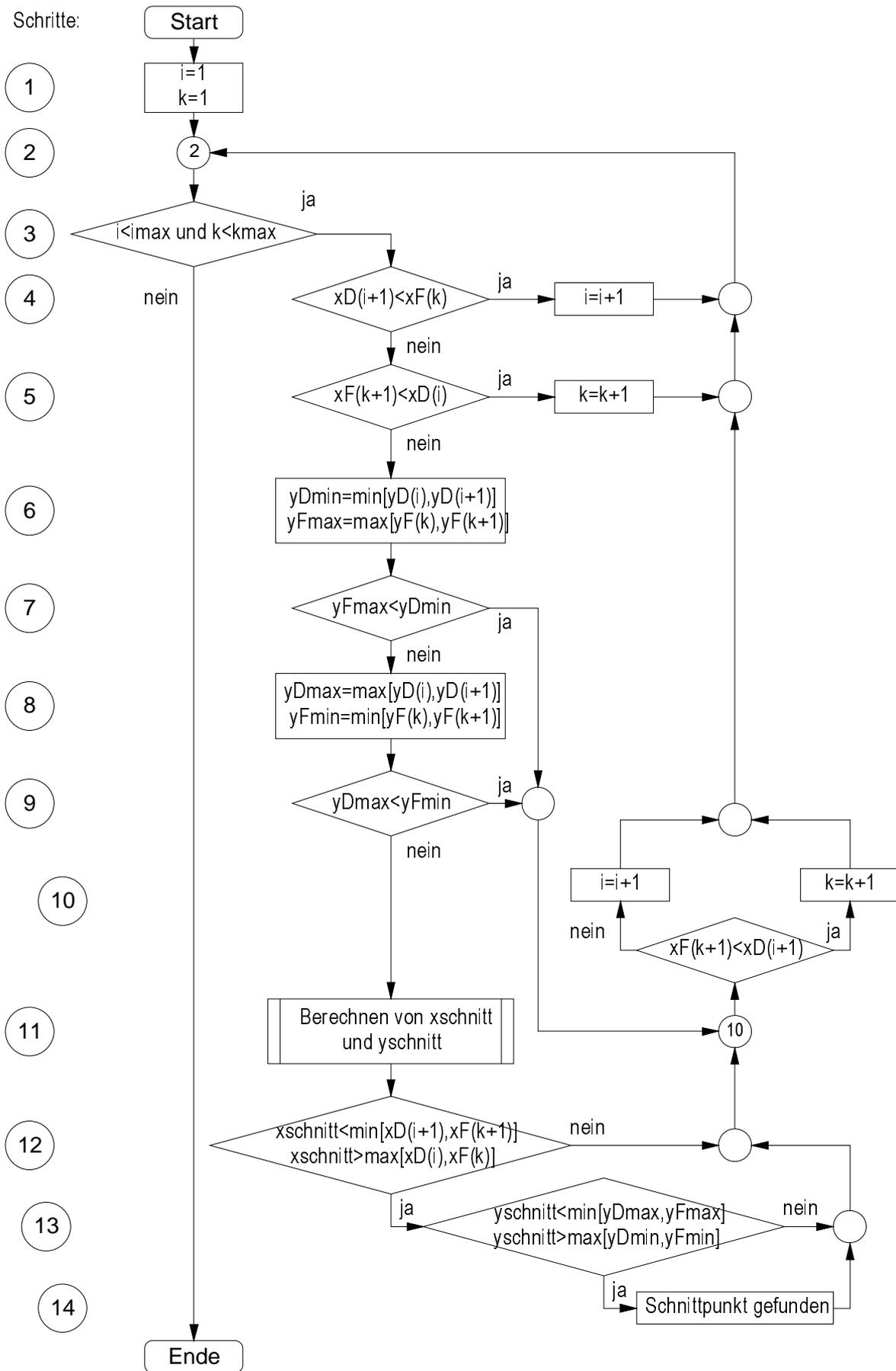


Bild 5.7: Ermitteln von Schnittpunkten S_i zwischen zwei Abschnitten k_{1d} und k_{1F} mit monoton steigenden x-Koordinatenwerten von zwei verschiedenen als Punkttefolgen gegebenen Kurven k_d und k_F



Flußdiagramm 5.1: Ermitteln von Schnittpunkten zwischen zwei Kurven

- (2) Nun beginnt eine Schleife zum Ermitteln der Schnittpunkte zwischen den Kurven k_d und k_f (Bild 5.7, S. 122). Die Suche wird bei den Strecken $\overline{D_i D_{i+1}}$ und $\overline{F_k F_{k+1}}$ [mit $i = 1$ und $k = 1$ - siehe Schritt (1) -] gestartet. Die Endpunkte beider Strecken spannen jeweils ein Rechteck auf, dessen Seiten parallel zum kartesischen Koordinatensystem angeordnet werden. Es kann nur ein Schnittpunkt zwischen beiden Strecken auftreten, wenn beide Rechtecke einander überlappen. Die Schritte (3) bis (10) in Flußdiagramm 5.1 beschreiben einen Algorithmus zum Auffinden einander überlappender Rechtecke.
- (3) Die Suche wird beendet, sobald der Zähler i oder der Zähler k den zulässigen Bereich verlassen hat. Das ist der Fall, wenn der Anfangspunkt D_i der Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ mit dem Endpunkt des Kurvenabschnitts k_{1d} oder aber, wenn der Anfangspunkt F_k der Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ mit dem Endpunkt des Kurvenabschnitts k_{1f} identisch ist.
- (4) Ist beim Betrachten der Rechtecke R_{D_i} und R_{F_i} die größere x -Koordinate der Endpunkte der Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ - also $x_{D_{i+1}}$ - kleiner als die kleinere x -Koordinate der Endpunkte der Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ - also x_{F_k} -, so können sich die Rechtecke R_{D_i} und R_{F_k} aufgrund der vorhandenen x -Koordinaten ihrer Eckpunkte nicht überlappen. (Dies trifft z. B. für die Rechtecke R_{D_1} und R_{F_1} zu.) Deshalb wird auf der Kurve k_d die rechts von der betrachteten Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ liegende Strecke $\overline{D_{i+1} D_{i+2}}$ für die weitere Suche nach einander überlappenden Rechtecken verwendet. Mit anderen Worten: der Zähler i wird um 1 erhöht, und die Suche wird durch einen Sprung zum nächsten Schleifendurchgang bei Schritt (2) fortgesetzt.
- (5) Analog zu Schritt (4) wird der Zähler k um 1 erhöht und damit das betrachtete Rechteck auf der Kurve k_f durch das rechts von ihm liegende ersetzt, wenn $x_{F_{k+1}}$ kleiner als x_{D_i} ist.
- (6) Nun werden die minimale y -Koordinate $y_{D_{\min}}$ der Endpunkte der Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ und die maximale y -Koordinate $y_{F_{\max}}$ der Endpunkte der Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ ermittelt [vgl. Schritt (7)].
- (7) Ist die y -Koordinate $y_{F_{\max}}$ der Oberkante des Rechtecks R_{F_k} kleiner als die y -Koordinate $y_{D_{\min}}$ der Unterkante des Rechtecks R_{D_i} (vgl. hierzu die Lage des Rechtecks R_{F_1} mit der Lage des Rechtecks R_{D_2}), so können sich die Rechtecke R_{F_k} und R_{D_i} aufgrund der vorhandenen y -Koordinaten ihrer Eckpunkte nicht überlappen. Zum Ermitteln des Rechtecks, das nun durch ein rechts von ihm liegendes zu ersetzen ist, wird zu Schritt (10) verzweigt.
- (8) Analog zu Schritt (6) werden die maximale y -Koordinate $y_{D_{\max}}$ der Endpunkte der Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ und die minimale y -Koordinate $y_{F_{\min}}$ der Endpunkte der Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ ermittelt.

- (9) Analog zu Schritt (7) können sich die Rechtecke R_{F_k} und R_{D_i} aufgrund der vorhandenen y -Koordinaten ihrer Eckpunkte nicht überlappen, wenn die y -Koordinate $y_{D_{\max}}$ der Oberkante des Rechtecks R_{D_i} kleiner als die y -Koordinate $y_{F_{\min}}$ der Unterkante des Rechtecks R_{F_k} ist.
- (10) Ragt die Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ weiter nach rechts als die Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ (vgl. Strecken $\overline{D_2 D_3}$ und $\overline{F_1 F_2}$), so wird die Strecke $\overline{F_k F_{k+1}}$ durch die rechts von ihr liegende Strecke $\overline{F_{k+1} F_{k+2}}$ ersetzt, indem der Zähler k um eins erhöht wird. Im anderen Fall wird die Strecke $\overline{D_i D_{i+1}}$ - durch das Erhöhen des Schleifenzählers i um 1 - getauscht gegen die rechts von ihr liegende Strecke $\overline{D_{i+1} D_{i+2}}$. Anschließend wird für einen neuen Schleifendurchlauf zum Schritt (2) verzweigt.
- (11) Konnte bisher das Auftreten eines Schnittpunkts nicht ausgeschlossen werden, so sind die Koordinaten x_{schnitt} und y_{schnitt} des Schnittpunkts zwischen den Strecken $\overline{D_i D_{i+1}}$ und $\overline{F_k F_{k+1}}$ zu bestimmen.
- (12) Nur wenn die x -Koordinate x_{schnitt} des in Schritt (11) ermittelten Schnittpunkts innerhalb des Rechtecks R_{D_i} und ebenfalls innerhalb des Rechtecks R_{F_k} liegt, kann es sich bei dem Schnittpunkt zwischen den Strecken $\overline{D_i D_{i+1}}$ und $\overline{F_k F_{k+1}}$ gleichzeitig um einen Schnittpunkt zwischen den Kurven k_d und k_f handeln. Im anderen Fall wird zu Schritt (10) verzweigt, um für einen neuen Schleifendurchlauf zu bestimmen, welches der beiden Rechtecke R_{D_i} oder R_{F_k} durch das rechts von ihm selbst liegende ersetzt wird.
- (13) Liegt die y -Koordinate y_{schnitt} des Schnittpunkts zwischen den Strecken $\overline{D_i D_{i+1}}$ und $\overline{F_k F_{k+1}}$ außerhalb des Rechtecks R_{D_i} oder aber außerhalb des Rechtecks R_{F_k} , so handelt es sich nicht um einen Schnittpunkt zwischen den Kurven k_d und k_f . Es wird in diesem Fall wiederum zu Schritt 10 verzweigt.
- (14) Der in Schritt (11) ermittelte Schnittpunkt der Strecken $\overline{D_i D_{i+1}}$ und $\overline{F_k F_{k+1}}$ stellt näherungsweise einen Schnittpunkt der Kurven k_d und k_f dar. Für die Suche weiterer Schnittpunkte zwischen beiden Kurven wird auch hier zu Schritt (10) verzweigt.

Bei dem geschilderten Vorgehen werden die Schnittpunkte S_1 und S_3 in Bild 5.7 (S. 122) gefunden. Der Schnittpunkt S_2 kann nur ermittelt werden, wenn der Abstand zwischen den einzelnen Punkten der Punktfolgen k_{1d} und k_{1f} verringert wird.

Für den in diesem Abschnitt entwickelten Algorithmus zum Ermitteln der Schnittpunkte von zwei durch Punktfolgen gegebenen Kurven werden bei n gegebenen Punkten n Prüfungen zum Erkennen der Kurvenabschnitte mit monoton steigenden oder fallenden x -Koordinaten der gegebenen Punkte einschließlich des notwendigen Aussortierens von Quasi-Asymptoten benötigt. Anschließend müssen maximal $(2n)$ Schnittpunktsuchen gestartet werden, bei denen häufig nur ein einfacher Vergleich durchzuführen ist [siehe Schritte (4)

und (5) in Flußdiagramm 5.1, S. 122]. Damit ist dieser Algorithmus schnell genug, um auch bei vielen gegebenen Punkten in einer akzeptablen Rechenzeit die Schnittpunkte zwischen zwei Kurven zu erfassen.

5.1.2.4 Transformation der Selbstberührungspunkte in die Koppellebene

Nach [2] liegen die Übergangskurvenpunkte - in der Koppellebene - über²⁾ den Schnittpunkten von Drehpol- und Fokalkurve - in der gestellfesten Ebene - . Sind beide Kurven für eine Getriebestellung bekannt (vgl. Abschnitte 5.1.2.1 und 5.1.2.2), so sind nunmehr deren Schnittpunkte zu ermitteln (vgl. Abschnitt 5.1.2.3) und in die Koppellebene zu transformieren.

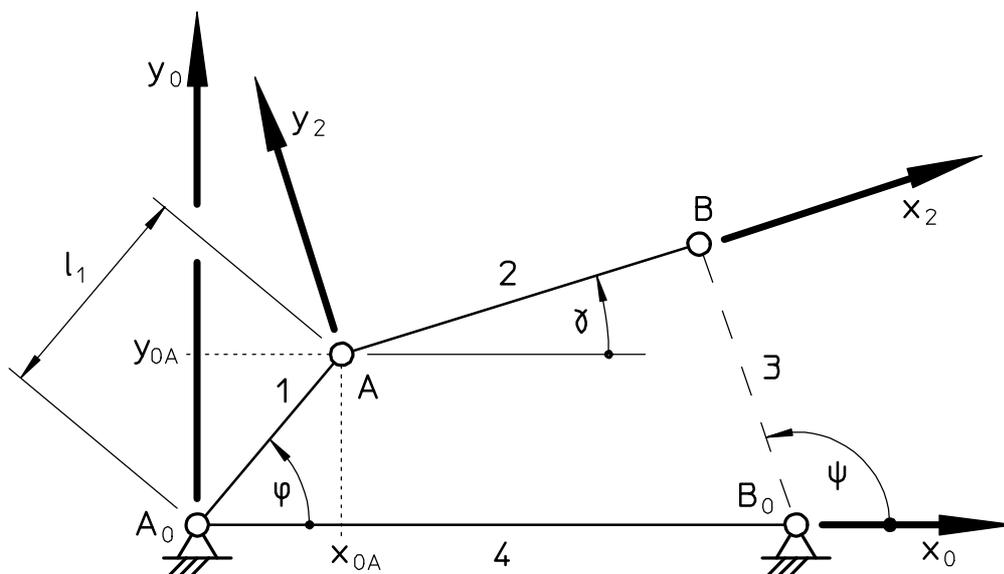


Bild 5.8: Gestellfeste (x_0, y_0) und koppelfeste (x_2, y_2) Koordinatensysteme

Hierzu müssen die Selbstberührungspunkte aus dem gestellfesten Koordinatensystem x_0, y_0 (Bild 5.8) in das um den Winkel γ gedrehte koppelfeste Koordinatensystem x_2, y_2 umgerechnet werden, wobei die Verschiebung des Nullpunktes vom Gelenk A_0 in das Gelenk A zu beachten ist. Nach [25] lauten die Gleichungen für die Transformation

²⁾ vergleiche Fußnote 1 Seite 42.

$$x_2 = [x_0 - \ell_1 \cos(\varphi)] \cos(\gamma) + [y_0 - \ell_1 \sin(\varphi)] \sin(\gamma), \quad (5.17)$$

$$y_2 = [x_0 - \ell_1 \cos(\varphi)] \sin(\gamma) + [y_0 - \ell_1 \sin(\varphi)] \cos(\gamma) \quad (5.18)$$

und für die Rücktransformation

$$x_0 = x_2 \cdot \cos(\gamma) - y_2 \cdot \sin(\gamma) + \ell_1 \cdot \cos(\varphi), \quad (5.19)$$

$$y_0 = x_2 \cdot \sin(\gamma) + y_2 \cdot \cos(\gamma) + \ell_1 \cdot \sin(\varphi). \quad (5.20)$$

Da die Gelenkpunkte und die Momentanpole eines viergliedrigen Gelenkgetriebes allerdings ebenfalls im Schnittpunkt der genannten Kurven liegen können [2], muß jeder Punkt über einem Schnittpunkt dahingehend geprüft werden, ob er tatsächlich einen Übergangskurvenpunkt darstellt.

5.1.2.5 Ausfiltern nicht zur Übergangskurve gehörender Lösungen

Die gestellfesten Gelenkpunkte A_0 und B_0 liegen in Schnittpunkten von Fokalkurve k_f und Drehpolkurve k_d (vgl. Bild 5.3, S. 114). Werden beide Punkte in die Koppellebene transformiert, so weisen die durch sie erzeugten Bahnen jedoch im allgemeinen keine Selbstberührungspunkte auf [2], und somit gehören die gestellfesten Gelenke nicht zur Übergangskurve. Da die gestellfesten Gelenke zum Ermitteln der Fokalkurve bekannt sein müssen, können ihre Koordinaten mit den Schnittpunkten von Fokalkurve und Drehpolkurve verglichen und bei Gleichheit aus der Lösungsmenge entfernt werden. Sind sie nicht bekannt, so ist zu prüfen, ob Selbstschnittpunkte der Rastpolkurve vorliegen und wenn ja, welche Selbstschnittpunkte gestellfeste Drehgelenke darstellen.

Der Momentanpol liegt ebenfalls in einem Schnittpunkt von Fokal- und Drehpolkurve, ohne jedoch zur Übergangskurve zu gehören [2]. Da seine Koordinaten für das Ermitteln der Fokalkurve benötigt werden, stellt es auch in diesem Fall keinen großen Aufwand dar, einen mit ihm identischen Schnittpunkt zu entfernen.

Koppelfeste Schwingengelenke gehören zwar zur Doppelpunktkurve, aber nicht zur Fokalkurve (vgl. Gelenk B in Bild 5.3, S. 114). Dauer-Übergangskurvenpunkte bzw. Dauer-Selbstberührungskurven können also auf diese Weise nicht gefunden werden. Da beide von viergliedrigen Gelenkgetrieben bekannt sind, bedeutet dies keine Einschränkung.

Es ist also zwar ein Algorithmus gefunden, der es erlaubt, Übergangskurvenpunkte von beliebigen viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken zu ermitteln. Dieser Algorithmus weist allerdings vier Nachteile auf:

- 1) Der Algorithmus ist sehr aufwendig, da je Getriebestellung zwei Kurven - nämlich die Drehpol- und die Fokalkurve - punktweise zu ermitteln sind. Anschließend sind dann die Schnittpunkte beider Kurven zu berechnen, und aus der Lösungsmenge müssen die nicht zur Übergangskurve gehörenden Punkte herausgefiltert werden.

- 2) Da die Schnittpunkte nur näherungsweise berechnet werden, ist die Genauigkeit ihrer Ermittlung nur geringfügig von der Rechengenauigkeit, sehr stark jedoch von der Genauigkeit der Approximation der verwendeten Kurven abhängig. Das Kriterium, bei welchem Abstand zwischen einem ermittelten Punkt und einem Gelenkpunkt bzw. dem Momentanpol die zu vergleichenden Punkte als identisch anzusehen sind, ist daher von Verlauf und Abstand der ermittelten Punkte der betrachteten Kurven abhängig. Problematisch ist das besonders, wenn ein Übergangskurvenpunkt in der Nähe eines zugehörigen Gangpolkurvenpunktes liegt - also in der Nähe eines Berührungspunktes von Gang- und Übergangskurve.
- 3) Ob alle Schnittpunkte gefunden werden können, hängt vom Kurvenverlauf und vom Abstand der gegebenen Kurvenpunkte der Drehpol- und der Fokalkurve ab. Da in der Regel die Kurvenpunkte für vorgegebene Werte eines mit konstanter Geschwindigkeit laufenden Antriebs ermittelt werden, kann bei stark schwankenden Übertragungsfunktionen - also besonders bei durchschlagfähigen Gelenkgetrieben - der Abstand der zu ermittelnden Punkte von den Punktefolgen der Drehpol- und der Fokalkurve sehr starke Unterschiede aufweisen. Während z. B. 360 vorgegebene Lagen des Getriebes zum Ermitteln der Übergangskurvenpunkte häufig ausreichen, kann es vorkommen, daß zwischen zwei Lagen ein so großer Abstand besteht, daß auch das Einfügen von 10 weiteren Zwischenlagen eine sinnvolle Approximation von Drehpol- und Fokalkurve durch Geradenstücke noch lange nicht zuläßt. Ein generelles Erhöhen der Anzahl der zu ermittelnden Lagen um den Faktor 10 reicht dann einerseits nicht aus, um alle Lösungen zu erfassen, andererseits benötigt das Verarbeiten von über 3000 Lagen einen unerwünschten rechentechnischen Aufwand. Sollen die Lagen der zu ermittelnden Punkte deshalb vom Abstand zum vorausgegangenen Punkt festgelegt werden, kann ein solcher Algorithmus nicht ohne ein weiteres Approximierungsverfahren als Postprozessor an vorhandene Analyseprogramme angehängt werden, sondern er ist in diese zu integrieren.
- 4) Da bis zu vier Übergangskurvenpunkte pro Getriebestellung gefunden werden, können zwar Punkte auf den verschiedenen Ästen der Übergangskurve ermittelt werden, nicht aber ein rechentechnisch weiter zu verarbeitender Kurvenverlauf eines Astes der Übergangskurve.

5.1.3 Iterative Verfahren zum Ermitteln der Übergangskurvenpunkte

Sind die Drehpolkurve und die Rastpolkurve bekannt, können die Selbstberührungspunkte auch ohne Kenntnis der Fokalkurve ermittelt werden. Hierfür ist die Erkenntnis zu nutzen, daß Doppelpunkte gleichzeitig Selbstberührungspunkte sind, wenn sie auf der Poleverbindungsgerechten liegen (Bild 2.1, S. 9) [2].

5.1.3.1 Ermitteln der Übergangskurve mit Hilfe der Geraden durch den Doppelpunkt und beide zugehörigen Momentanpole

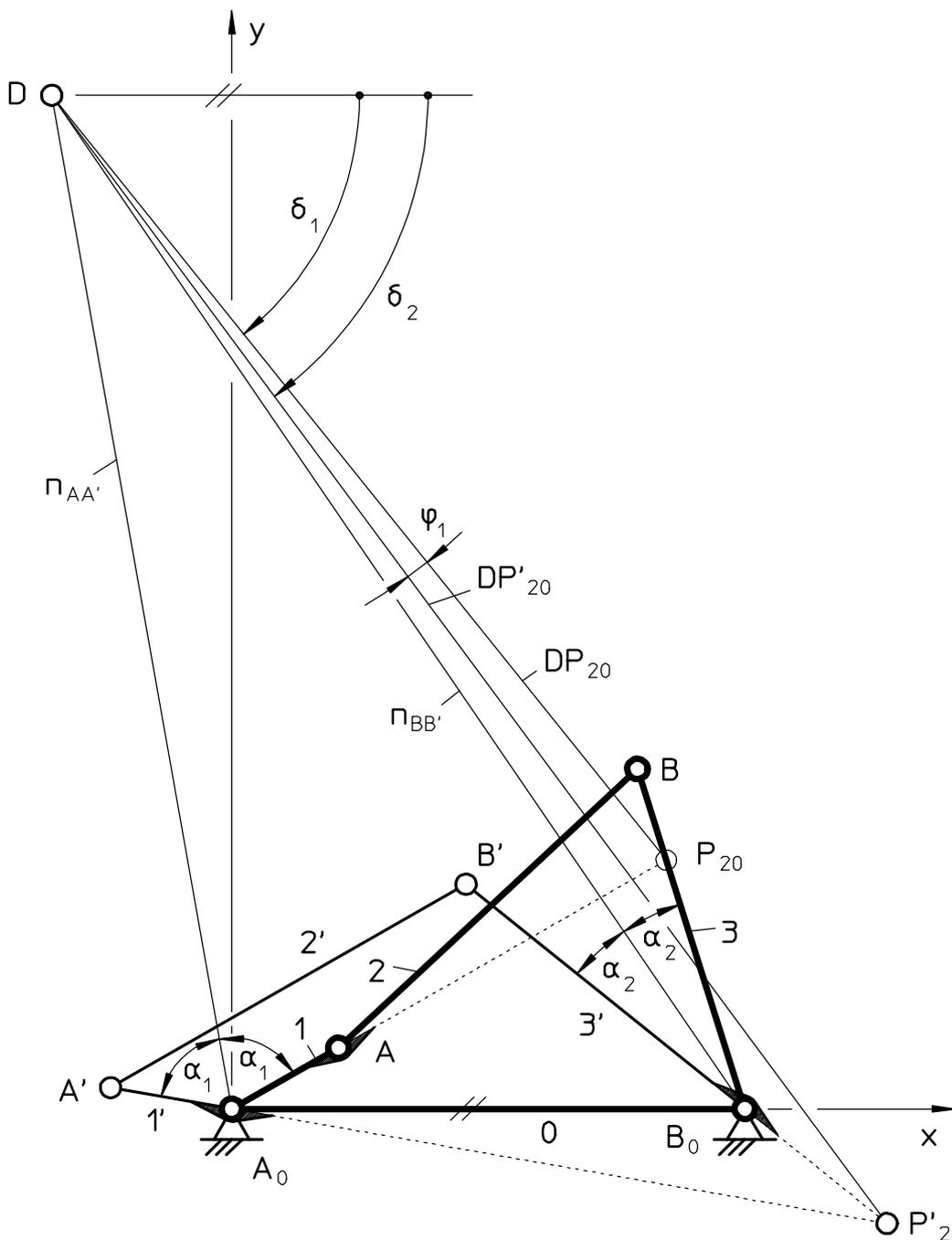


Bild 5.9: Zur Konstruktion des Doppelpunktes D eines viergliedrigen Gelenkgetriebes

Werden die Steigungen (bzw. die Winkel δ_1 und δ_2) der Geraden DP_{20} und DP'_{20} (Bild 5.9) durch den Doppelpunkt D und durch jeweils einen der beiden zum Doppelpunkt gehörenden Momentanpole P_{20} bzw. P'_{20} für die beiden dargestellten Getriebelagen ermittelt, so handelt es sich bei dem Doppelpunkt um einen Selbstberührungspunkt, wenn die Steigungen beider Geraden (bzw. deren Winkel δ_1 und δ_2) identisch sind. Da sich dieses Verfahren auf beliebige stetig und hebbar unstetig differenzierbare ebene Bewegungen von Ebenen anwenden läßt, soll es in allgemeiner Form in Abschnitt 5.2.4 erläutert werden.

Um jedoch ein besseres Verständnis für die Entstehungsmechanismen von Übergangskurve und Selbstberührungskurve zu bekommen, soll im folgenden Abschnitt ein hypothetischer Mechanismus entwickelt werden, der Gelenkpunkte im Doppelpunkt D sowie in den Momentanpolen P_{20} und P'_{20} von zwei verschiedenen Lagen eines viergliedrigen Gelenkgetriebes aufweist. Der Antrieb ist dabei so zu wählen, daß das Gelenk D auf einfache Weise in eine Position zu bewegen ist, in der es mit den beiden Momentanpolen auf einer Geraden liegt und somit einen Selbstberührungspunkt seiner Bahn durchläuft.

5.1.3.2 Hypothetischer Mechanismus zum Erzeugen eines Übergangskurvenpunktes

Es ist ein hypothetischer Mechanismus zu entwickeln, der für eine gegebene Lage eines viergliedrigen ebenen Gelenkgetriebes mit vier Drehgelenken in der Lage A_0ABB_0 (Bild 5.9) ein Positionieren der Lage $A_0A'B'B_0$ derart gewährleistet, daß der zu beiden Getriebelagen gehörende Doppelpunkt D auf der Verbindungsgeraden $P_{20}P'_{20}$ der beiden Momentanpole P_{20} und P'_{20} zu liegen kommt. Für den gesuchten Mechanismus werden die Gelenke A und B sowie das Gelenk über³⁾ dem Momentanpol P_{20} zusätzlich zu den beiden Gelenken A_0 und B_0 zu gestellfesten Drehgelenken erklärt (Bild 5.10).

³⁾ vergleiche Fußnote 1 Seite 42.

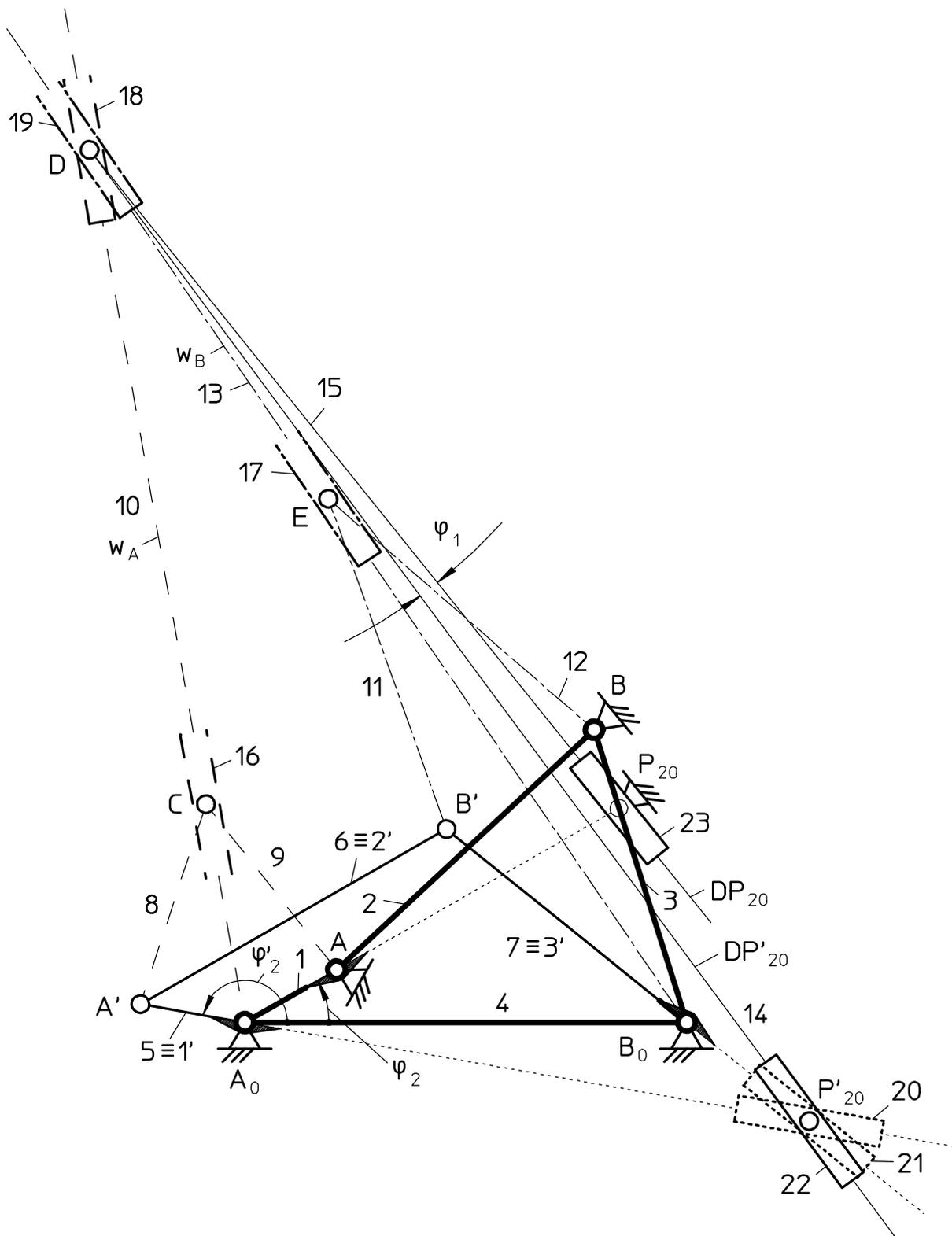


Bild 5.10: "Mechanismus" zum Ermitteln eines Übergangskurvenpunktes eines viergliedrigen Gelenkgetriebes mit vier Drehgelenken durch Verschieben des Doppelpunktes D der Koppellebene in den gesuchten Punkt durch Vermindern des Winkels φ_1 auf 0°

Der Doppelpunkt D liegt bekannterweise im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_A des Winkes $\sphericalangle A'A_0A$ und der Winkelhalbierenden w_B des Winkes $\sphericalangle B'B_0B$. Damit die Gerade A_0D immer die Winkelhalbierende des Winkes $\sphericalangle A'A_0A$ bildet, wird in den Gelenken A und A' ein gleichschenkliger Zweischlag $A'CA$ angelenkt, dessen Gelenk C sich immer auf der Winkelhalbierenden w_A befinden soll. Um eine Strecklage des Zweischlags $A'CA$ auszuschließen, werden die Glieder 8 und 9 länger als der Abstand $\overline{A_0A}$ gewählt. Mit dem Gelenk C wird nun die Linearführung 16 drehbar verbunden, die das im gestellfesten Gelenk A_0 drehend gelagerte Glied 10 führt. Auf diese Weise bildet das Glied 10 immer die Winkelhalbierende w_A .

Analog hierzu führt der gleichschenklige Zweischlag $B'EB$ das Glied 13, das somit die Winkelhalbierende w_B darstellt. Werden nun eine durch Glied 10 geführte Linearführung 18 und eine durch Glied 13 geführte Linearführung 19 mit Hilfe des Drehgelenks D miteinander verbunden, so liegt das Gelenk D immer in dem zu den beiden Lagen A_0ABB_0 und $A_0A'B'B_0$ gehörenden Doppelpunkt.

Der Momentanpol P'_{20} liegt bekanntlich im Schnittpunkt der Geraden durch $A'A_0$ und durch $B'B_0$. Werden eine durch Glied $5 \equiv 1'$ geführte Linearführung 20 mit einer durch Glied $7 \equiv 3'$ geführten Linearführung 21 über ein Drehgelenk miteinander verbunden, so liegt dieses Drehgelenk immer über dem Momentanpol P'_{20} .

Zum Schluß werden noch die beiden Glieder 14 und 15 zwischen dem Doppelpunkt D und den Momentanpolen P'_{20} bzw. P_{20} zugefügt, um die beiden Geraden DP'_{20} und DP_{20} technisch nachzubilden. Werden beide Glieder im Punkt D drehbar gelagert, so müssen sie mit den Drehgelenken über⁴⁾ den Momentanpolen mit Hilfe von Linearführungen (Glieder 22 und 23) verbunden werden, um den Laufgrad 1 des Mechanismus zu gewährleisten.

Die Glieder 14 (DP'_{20}) und 15 (DP_{20}) schließen nun gemeinsam den Winkel φ_1 ein. Wird zwischen beiden Gliedern ein Antrieb angeordnet, der dafür sorgt, daß zwischen ihnen eine Decklage (oder aber eine Strecklage) entsteht, so kommt das Gelenk D über einen Selbstberührungspunkt des viergliedrigen Getriebes A_0ABB_0 zu liegen.

Werden nun die Glieder 14 (DP'_{20}) und 15 (DP_{20}) in der Deck- bzw. in der Strecklage gegenseitig fixiert, befinden sich der Doppelpunkt D und die beiden Momentanpole P_{20} und P'_{20} immer auf einer Geraden (Bild 5.11). Damit der Mechanismus den Laufgrad 1 behält, müssen nun die Gelenke A und B sowie das über dem Momentanpol P_{20} liegende Gelenk aus Bild 5.10 wieder vom Gestell befreit werden. Die Lage des Gelenks über dem Momentanpol muß dann allerdings durch zwei zusätzliche, an den Gliedern 1 und 3 angebrachte Linearführungen 24 und 25 an die Bahn des Momentanpols P_{20} gefesselt werden. Wird nun das Glied 1 angetrieben (gekennzeichnet durch den Winkel φ_2), bewegt sich das Gelenk D entlang der Selbstberührungskurve k_s des viergliedrigen Ge-

⁴⁾ vergleiche Fußnote 1 Seite 42 (gilt auch für die nachfolgende Verwendung von *über*)

triebes A_0ABB_0 , die durch Transformation in die Koppellebene zur Übergangskurve $k_{\bar{u}}$ wird.

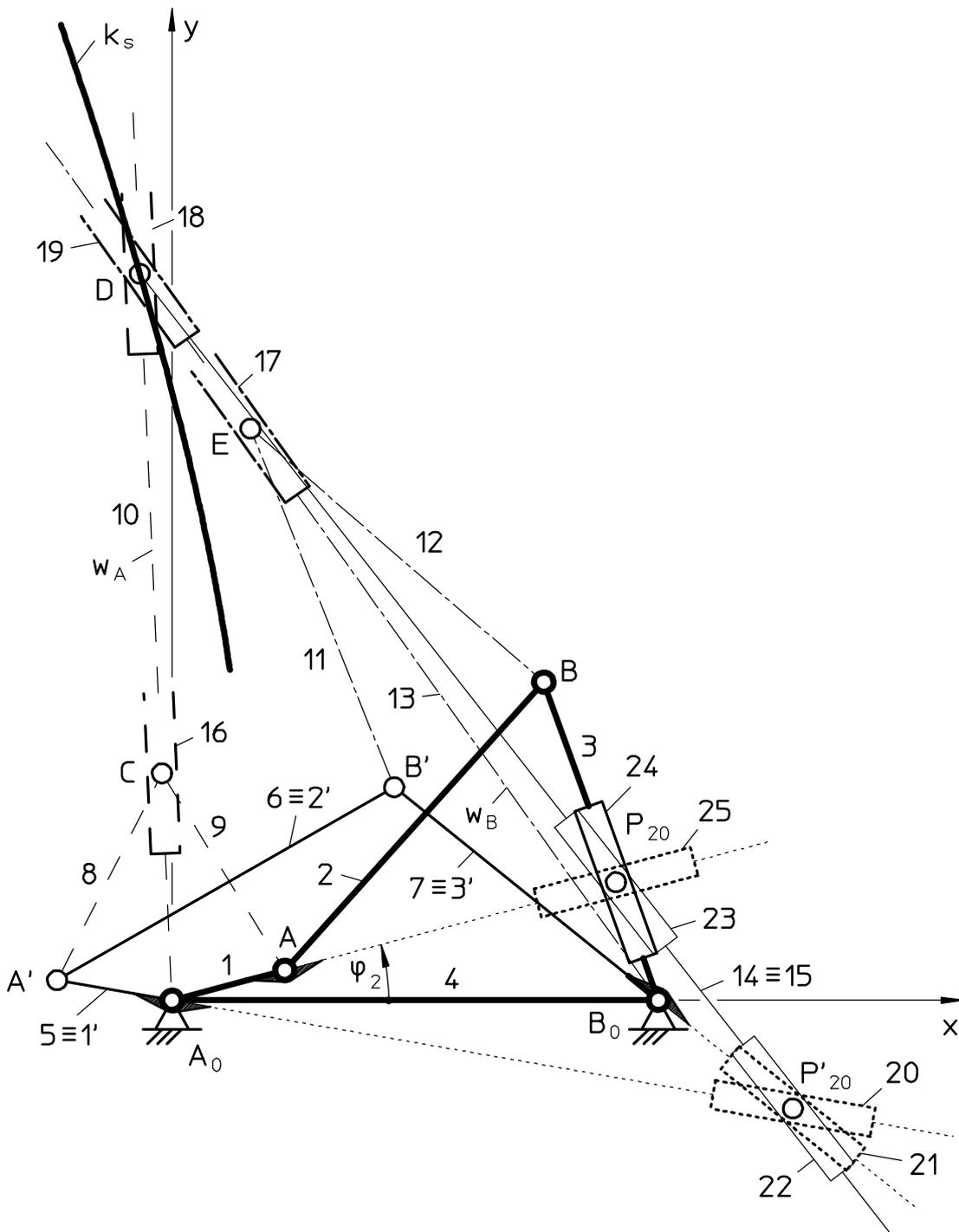


Bild 5.11: "Mechanismus" zum Abfahren der Selbstberührungskurve k_s in der ruhenden Ebene eines viergliedrigen Gelenkgetriebes mit vier Drehgelenken als Spur des Übergangskurvenpunktes D der Koppellebene

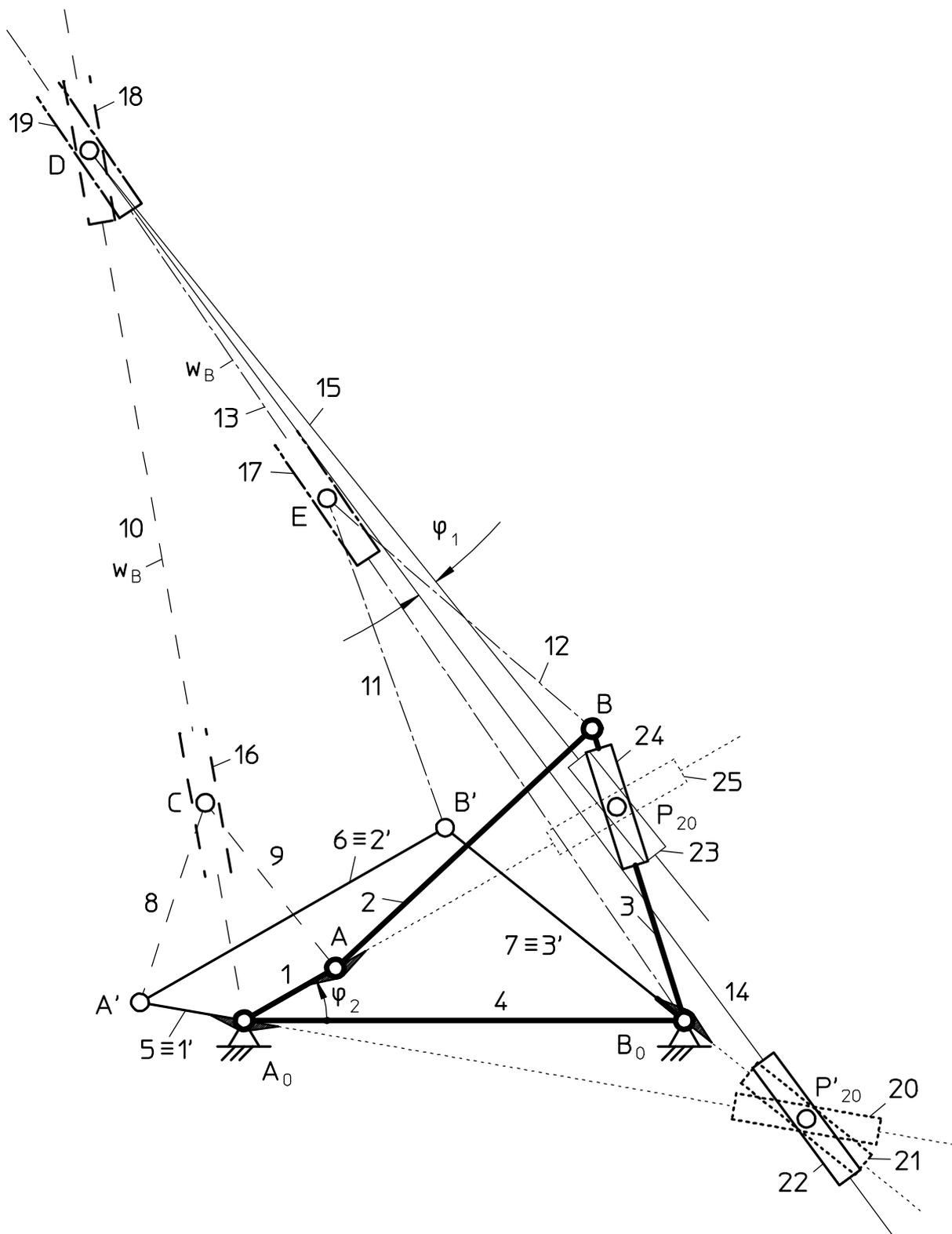


Bild 5.12: "Mechanismus" zum erstmaligen Anfahren eines Selbstberührungspunktes durch das Gelenk D und zum anschließenden Abfahren der Selbstberührungskurve k_s eines viergliedrigen Gelenkgetriebes mit vier Drehgelenken

Ein Getriebe zum erstmaligen Anfahren eines Selbstberührungspunktes durch das Gelenk D und zu einem anschließenden Abfahren der Selbstberührungskurve k_s durch diesen Punkt D müßte also einen Laufgrad von 2 aufweisen (Bild 5.12). Zuerst wird der Antriebswinkel φ_2 konstant gehalten, bis der Antriebswinkel φ_1 den Wert 180° oder 0° eingenommen hat und damit der Punkt D über einem Selbstberührungspunkt zu liegen gekommen ist.

Anschließend wird der Antriebswinkel φ_1 fixiert, und eine Variation des Antriebswinkels φ_2 bewirkt ein Abfahren der Selbstberührungskurve durch den Punkt D .

Der hier entwickelte 25-gliedrige Mechanismus weist allerdings einige Nachteile auf:

- Die Drehgelenke über den Momentanpolen P_{20} und P'_{20} und das Gelenk D können - in Abhängigkeit vom Typ des zugrunde liegenden Viergelenkgetriebes - einen gegen unendlich gehenden Abstand zum Gelenk A_0 einnehmen.
- Liegen die Momentanpole P_{20} und P'_{20} übereinander, nimmt das Getriebe eine Wechsellage [42] ein, da in diesem Fall auch die Glieder 3 und $7 \equiv 3'$ übereinander liegen. Diese Lage hat nämlich zur Folge, daß die Glieder 11 und 12 mit der Linearführung 17 um das Gelenk B rotieren können, während alle übrigen Glieder - bis auf die Glieder 14 und 15 mit deren Linearführungen - stehen bleiben.
- Nehmen die Glieder 1 und $5 \equiv 1'$ eine Deck- oder Strecklage ein, so handelt es sich um eine Verzweigungslage, da bei einem rotierend angetriebenen Glied 1 das Glied $5 \equiv 1'$ sich beim Anlauf aus dieser Lage in der ursprünglichen Richtung oder aber in entgegengesetzter Richtung bewegen kann [20], [42].

Diese Aufzählung läßt erwarten, daß der Mechanismus zum Durchfahren der Selbstberührungskurve von viergliedrigen Gelenkgetrieben analog zu den durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben schlechte Übertragungseigenschaften aufweisen wird. Für hypothetische Getriebe ist diese Eigenschaft zwar dem Wortlaut nach unerheblich. Aber sehr schlechte Übertragungseigenschaften bedeuten in der Regel, daß Probleme während der Analyse zu erwarten sind. Diese Tatsache und die zu erwartenden singulären Stellungen führen dazu, daß numerische Verfahren zum Analysieren der vollständigen Bewegung des Mechanismus nicht geeignet sind. Analytische Verfahren sind zwar prinzipiell geeignet, eine vollständige Periode von durchschlagfähigen Getrieben zu analysieren [27], [28], das Verwenden des Antriebswinkels φ_1 (auch dessen Blockierung) lassen sie jedoch nicht zu.

Trotz dieser zu erwartenden Probleme soll der Versuch unternommen werden, die Bewegung des Mechanismus zu analysieren. Denn wenn die Analyse (in großen Teilen) gelingt und die während der Analyse auftretenden Probleme erkannt sind, können die Schwierigkeiten für das Ermitteln der Übergangskurve beliebiger Mechanismen abgeschätzt werden.

Wie erwähnt, kommen für die Analyse der in den Bildern 5.10 (S. 131), 5.11 (S. 133) und 5.12 (S. 134) gezeigten Mechanismen nur numerische Lösungsverfahren in Frage, bei deren ausschließlichem Einsatz jedoch auf das Analysieren einer vollständigen Periode verzichtet werden muß. Die bekanntesten numerischen Verfahren sind

- das Finite-Elemente-Verfahren [29], [30] und
- die Vektormethode mit iterativem Polygonschluß-Verfahren [6], [31].

Für das Finite-Elemente-Verfahren muß ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, das für alle n_P beweglichen Punkte, deren Positionen bestimmt werden müssen, zwei (bei waagerechten und senkrechten Schiebern ggf. nur eine) Unbekannte aufweist [30]. Bei der Vektormethode mit iterativem Polygonschluß-Verfahren fallen dagegen für ein Getriebe mit n_G Getriebegliedern und n_{an} Antrieben $(n_G - n_{an} - 1)$ Unbekannte an [6]. Damit ergeben sich für die verschiedenen Mechanismen die in Tabelle 5.1 ermittelte Anzahl Unbekannter:

Tabelle 5.1: Vergleich verschiedener numerischer Analysemethoden

Bild-Nr. des Mechanismus	n_P	n_G	n_{an}	Anzahl der Unbekannten bei der	
				FEM-Analyse	Vektormethode
5.10	6	20	1	12	18
5.11	9	24	1	18	22
5.12	9	25	2	18	22

Obwohl die Finite-Elemente-Methode im allgemeinen eine höhere Anzahl an Unbekannten liefert als die Vektormethode, kommt sie bei den hier zu analysierenden Mechanismen mit weniger Unbekannten aus, da mehrere Doppel- und sogar Dreifachgelenke vorhanden sind. Zum Analysieren der Mechanismen wird daher die Finite-Elemente-Methode nach [30] verwendet, bei der jeweils die kleinere quadratische Matrix zu lösen ist. Sie erfordert außerdem den geringeren Programmieraufwand. Da nur die Lage des Punktes D gesucht ist, kann auf das Ermitteln der Übertragungsfunktion 2. Ordnung verzichtet werden. (Die Übertragungsfunktion 1. Ordnung, die ebenfalls nicht benötigt wird, fällt bei der FEM-Analyse beim Ermitteln der Übertragungsfunktion 0. Ordnung automatisch an.)

Vor dem Erstellen eines speziellen Programms zum Ermitteln von Teilen der Übergangskurve viergliedriger Gelenkgetriebe wurde der Mechanismus aus Bild 5.11 (S. 133) für das käuflich erwerbbar, auf PC lauffähige FEM-Programm SAM [32] modelliert. Dieses Programm gestattet eine Simulation der Getriebebewegungen, so daß optisch erkannt werden kann, in welchen Positionen die Berechnung abbricht und wie der Mechanismus in diese Position gelangt ist.

Es trat leider immer wieder die Situation ein, daß bei vorgegebener Schrittweite des Antriebswinkels φ_2 eine neue Lage des Mechanismus nicht ermittelt werden konnte, obwohl sich der Mechanismus noch nicht in der Nähe einer Verzweigungslage befand. Dies war immer darauf zurückzuführen, daß die Variation des Antriebswinkels φ_2 von z. B. 1° eine zu große Änderung der Lage verschiedener Gelenke des Mechanismus hervorrief. Es ist also erforderlich, die Schrittweite in den Stellungen zu verringern, in denen große Lageänderungen bei einer vorgegebenen Variation des Antriebswinkels zu erwarten sind.

Da wegen der Verzweigungslagen und der möglichen gegen unendlich gehenden Abstände zwischen verschiedenen Gelenken weitere Probleme beim Anwenden rein numerischer Lösungsansätze vorherzusehen sind, wird hier ein Lösungsalgorithmus vorgeschlagen, der aus einem analytischen und einem numerischen Teil besteht:

- 1) Mit Hilfe eines analytischen Verfahrens soll der Mechanismus in Bild 5.10 (S. 131) in eine gewünschte Ausgangslage gebracht werden.
- 2) Die Finite-Elemente-Methode wird anschließend eingesetzt, um den Doppelpunkt D in einen Selbstberührungspunkt zu verschieben. Tabelle 5.1 (S. 136) zeigt, daß für den verwendeten Mechanismus nur eine relativ kleine quadratische Matrix vom numerischen Lösungsalgorithmus bearbeitet werden muß.
- 3) Anhand der Lösung wird abgeschätzt, wie der Antriebswinkel des Mechanismus variiert werden darf, um das Getriebe in eine neue, sinnvolle Ausgangslage zu bewegen. Nun folgt ein erneutes Abarbeiten des Punktes 1.

Diese drei Schritte sollen im folgenden näher erläutert werden.

5.1.3.2.1 Der analytische Anteil des Algorithmus

Ist das viergliedrige Gelenkgetriebe, von dem ein Selbstberührungspunkt zu ermitteln ist, vorgegeben, so liegen die Längen der Glieder 1 bis 4 und somit auch die Längen der Glieder $1'$ bis $3'$ fest (Bild 5.10, S. 131). Die gestellfesten Gelenkpunkte A_0 und B_0 können nun willkürlich gewählt werden. Ist die Lage des Gliedes 1 und damit die des Punktes A vorgegeben, so läßt sich recht einfach mit bekannten Verfahren [27], [33] die Position des Punktes B bestimmen. Da der Zweischlag ABB_0 zwei verschiedene Lagen einnehmen kann, muß mit Hilfe einer Bewegungsbereichskennzahl festgelegt werden, welche der beiden möglichen Positionen der Punkt B einnimmt. Die Bewegungsbereichskennzahl gibt dabei an, ob der Punkt links oder rechts von einem Vektor liegt, der vom Anfangspunkt des Zweischlags ABB_0 (z. B. dem Punkt A) zum Zielpunkt (z. B. dem Punkt B_0) zeigt.

Auf die gleiche Weise läßt sich die Lage des Punktes B' ermitteln, wenn die Lage des Gliedes $5 \equiv 1'$ vorgegeben ist. Hierbei ist darauf zu achten, daß bei umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben die Bewegungsbereichskennzahl für alle Getriebestellungen

(also auch für die mit Apostroph gekennzeichneten Lagen) gleich ist. Bei totalschwingfähigen Getrieben wechselt sie in den Strecklagen von Koppel und Abtriebsglied, bei durchschlagenden durchschlagfähigen⁵⁾ Getrieben in den Verzweigungslagen. Der Algorithmus muß dies berücksichtigen.

Tabelle 5.2: Parameter zum Beschreiben des Mechanismus in Bild 5.10 (S. 131)

Gelenk	Art der Definition	Nr. ⁶⁾	Bezugspunkte	Parameter
A ₀	Raumfeste Koordinaten	1		x ₀ , y ₀
B ₀	Abstand und Winkel	4	A ₀	$\overline{A_0B_0}$, 0°
A	Abstand und Winkel	4	A ₀	$\overline{A_0A}$, φ ₂
B	Abstände zu 2 Punkten	7	A, B ₀	\overline{AB} , $\overline{B_0B}$, K _B (B)
A'	Abstand und Winkel	4	A ₀	$\overline{A_0A'} = \overline{A_0A}$, φ _{2'}
B'	Abstände zu 2 Punkten	7	A', B ₀	$\overline{AB'} = \overline{AB}$, $\overline{B_0B'} = \overline{B_0B}$, K _B (B')
P ₂₀	Geradenschnittpunkt der Geraden g ₁ und g ₂	9	A ₀ , A für g ₁ B ₀ , B für g ₂	
P ₂₀ '	Geradenschnittpunkt der Geraden g ₁ und g ₂	9	A ₀ , A' für g ₁ B ₀ , B' für g ₂	
C	Abstände zu 2 Punkten	7	A, A'	\overline{AC} , $\overline{A'C} = \overline{AC}$, K _B (C)
E	Abstände zu 2 Punkten	7	B, B'	\overline{BE} , $\overline{B'E} = \overline{BE}$, K _B (E)
D	Geradenschnittpunkt der Geraden g ₁ und g ₂	9	A ₀ , C für g ₁ B ₀ , E für g ₂	

Die Lage der Gelenke C und E läßt sich anschließend mit Hilfe der beteiligten gleichschenkligen Zweischläge ACA' und BEB' ermitteln. Welchen Bewegungsbereich die Zweischläge einnehmen, spielt für die Lage des Gelenks D keine Rolle. Wie weiter oben erwähnt wurde, sollten die Glieder des Zweischlags ACA' auf jeden Fall länger als die des

⁵⁾ vergleiche Fußnote 1 Seite 10.

⁶⁾ Siehe Spalte „Lfd. Nr.“ in Tabelle 5.3 (S. 139) und Tabelle 5.4 (S. 142)

Zweischlags AA_0A' gewählt werden, um Strecklagen auszuschließen. Analoges gilt für die Zweischläge BEB' und BB_0B' .

Der Momentanpol P_{20} liegt im Schnittpunkt der Geraden A_0A mit der Geraden B_0B . Da von beiden Geraden zwei Punkte gegeben sind, läßt sich für beide eine Geradengleichung aufstellen. Der Schnittpunkt läßt sich anschließend mit Hilfe bekannter Verfahren (z. B. [25]) eindeutig bestimmen. Analog hierzu können die Positionen des Momentanpols P'_{20} und des Doppelpunktes D bestimmt werden.

Werden diese Überlegungen tabellarisch aufgeschrieben, entsteht die um einige zusätzliche Angaben ergänzte Tabelle 5.2 (S. 138). Die erste Spalte „Gelenk“ dieser Tabelle gibt an, welcher Punkt in der entsprechenden Zeile definiert wird. Die zweite Spalte „Art der Definition“ beschreibt die Abhängigkeit des zu definierenden Punktes von anderen Punkten. Die 3. Spalte „Nr.“ schafft den Bezug zu Tabelle 5.3 und Tabelle 5.4 (S. 142). In der 4. Spalte „Bezugspunkte“ sind die Punkte aufgeführt, die für die Definition des neuen Punktes mit Hilfe der in Spalte 5 aufgeführten Parameter bekannt sein müssen. Der Parameter K_B steht hierbei für die Bewegungsbereichskennzahl. Ist es möglich, einen Mechanismus mit einer solchen Tabelle zu beschreiben und die Tabelle so anzuordnen, daß diese Spalte nur Punkte enthält, die in darüber angeordneten Zeilen definiert wurden, so läßt sich die Lage des Mechanismus analytisch ermitteln.

Tabelle 5.3: Geeignete Koordinatensysteme für die Beschreibung der Lage eines Punktes P (vgl. Bild 5.15, S. 143)

Koordinatensystem	Richtung der x-Achse	Koordinatentyp	Bezugspunkte	Parameter	Lfd. Nr.
raumfest	waagrecht	kartesisch		x_0, y_0	1
		polar		l, α	2
geg. durch Punkt P_1	geg. durch Winkel α_1	kartesisch	P_1	x_P, y_P	3
		polar		$\overline{PP_1}, \alpha$	4
geg. durch Punkt P_1	geg. durch Punkt P_2	kartesisch	P_1, P_2	x_P, y_P	5
		polar		$\overline{PP_1}, \alpha$	6

Damit der Algorithmus zum Erzeugen einer Ausgangslage des Mechanismus nach Bild 5.10 (S. 131) für die Suche eines Selbstberührungspunktes von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken auch für andere viergliedrige Gelenkgetriebe auf einfache Weise ergänzt werden kann (vgl. Bilder 5.13, S. 139, und 5.14, S. 140), wurde folgender Algorithmus entworfen:

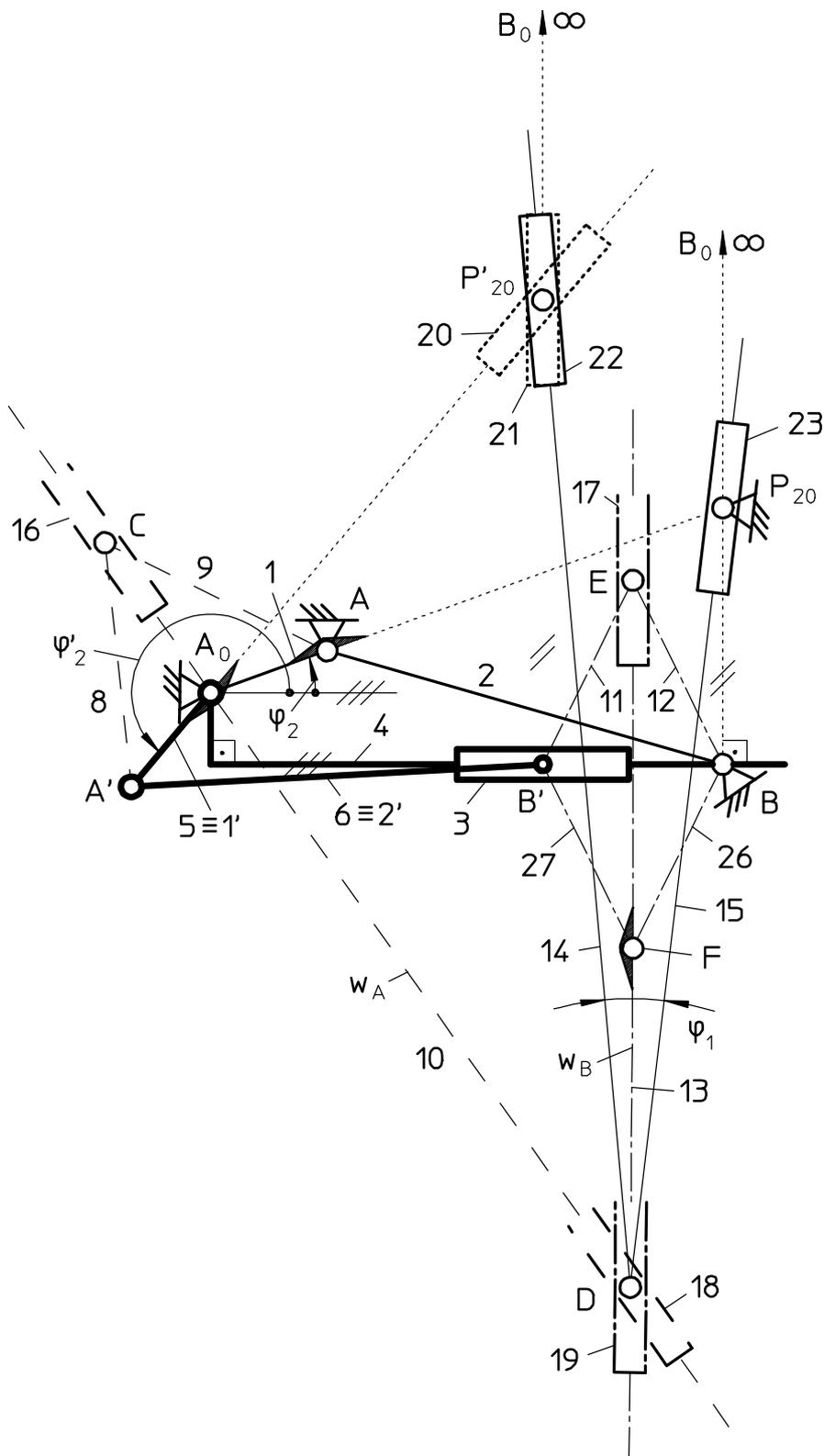


Bild 5.13: "Mechanismus" zum Ermitteln eines Selbstberührungspunktes D von Schubkurkeln

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

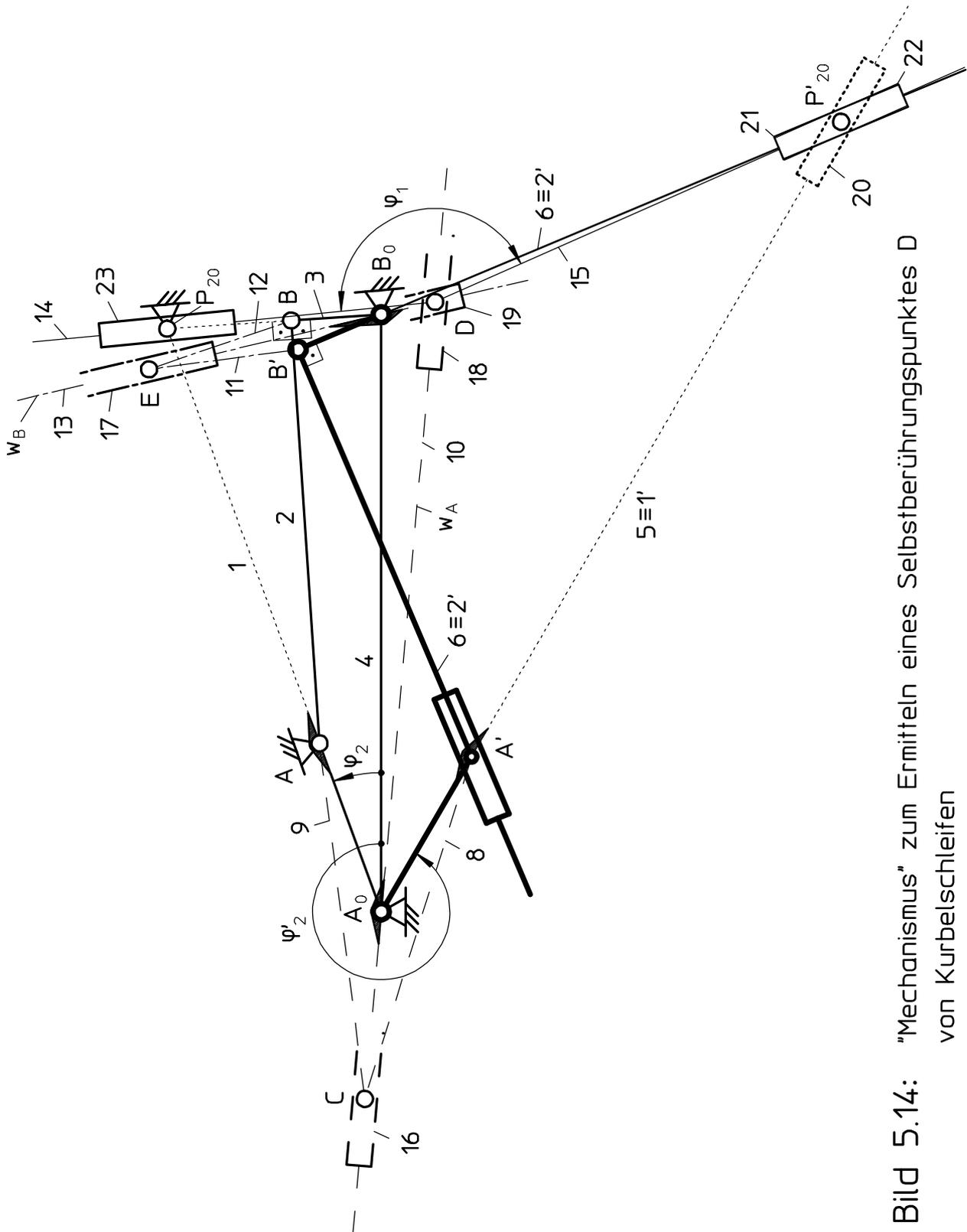


Bild 5.14: "Mechanismus" zum Ermitteln eines Selbstberührungspunktes D von Kurbelschleifen

Ist ein Mechanismus definiert, dessen Gliedlagen durch Punkte vorgegeben sind, die mit Hilfe der in Tabelle 5.3 (S. 139) und Tabelle 5.4 genannten Definitionen und den zugehörigen Parametern beschrieben werden können, so soll die neue Lage aller Punkte des Mechanismus ermittelt werden, wenn ein Parameter des Mechanismus geändert wird.

Tabelle 5.4: Durch Abstände und durch die Lage auf einer Geraden beschriebene Punkte P (vgl. Bild 5.16, S. 144)

Art der Lagedefinition eines Punkte P	Bezugspunkte	Parameter	Lfd. Nr.
Abstände zu 2 Punkten P_1 und P_2	P_1, P_2	$\overline{PP_1}, \overline{PP_2}, K_B(P)$	7
Punkt P auf Thaleskreis durch 2 geg. Punkte P_1 und P_2 ⁷⁾	P_1, P_2	$\overline{PP_1}, K_B(P)$	8
Geradenschnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2	P_1 und P_2 für g_1 P_3 und P_4 für g_2		9
	P_1 und P_2 für g_1 P_3 für g_2	Winkel α von g_2	10
	P_1 für g_1 P_2 für g_2	Winkel α_1 von g_1 Winkel α_2 von g_2	11
Punkt P im Abstand $\overline{PP_2}$ zu einem Punkt P_2 auf einer Geraden g durch einen Punkt P_1	P_1, P_2	$\overline{PP_2}$, Winkel α von g , $K_B(P)$	12
Punkt P im Abstand $\overline{PP_3}$ zu einem Punkt P_3 auf einer Geraden g durch zwei Punkte P_1 und P_2	P_1, P_2, P_3	$\overline{PP_3}, K_B(P)$	13

Für diese Art des Modellierens von Gelenkgetrieben und deren Kombination mit Zahnrädern und Riemenscheiben wurde das FORTRAN-Programm PRE_SAM parallel zu dieser Dissertation als Preprozessor für die käuflich zu erwerbenden FEM-Programme SAM [32] und SPACAR [22] sowie für das in [30] beschriebenen FEM-Programm FEMAN2 entwickelt. Es ist auf PC sowie auf UNIX-Workstations der Fa. Hewlett Packard lauffähig, und es erzeugt Datensätze von ebenen Mechanismen, deren Kinematik und Kinetostatik

⁷⁾ Diese Lagedefinition erzeugt ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle P_1PP_2$ mit der in der Getriebetechnik häufig verwendeten Versetzung $e = \overline{P_1P}$

wahlweise mit Hilfe der Programme SAM, SPACAR oder FEMAN2 analysiert werden können.

Die Workstation-basierte Version des Programms gestattet außerdem das Modellieren des Mechanismus mit Hilfe des CAD-Systems ME10 der Fa. Hewlett Packard [34] und die Umsetzung der Eingabe-Datensätze der genannten Programme in eine Darstellung des Mechanismus durch das CAD-System ME10. Ein Austausch der Daten mit dem Programm KINEMA [6] ist mit dieser Version für Getriebe mit Drehgelenken ebenfalls möglich.

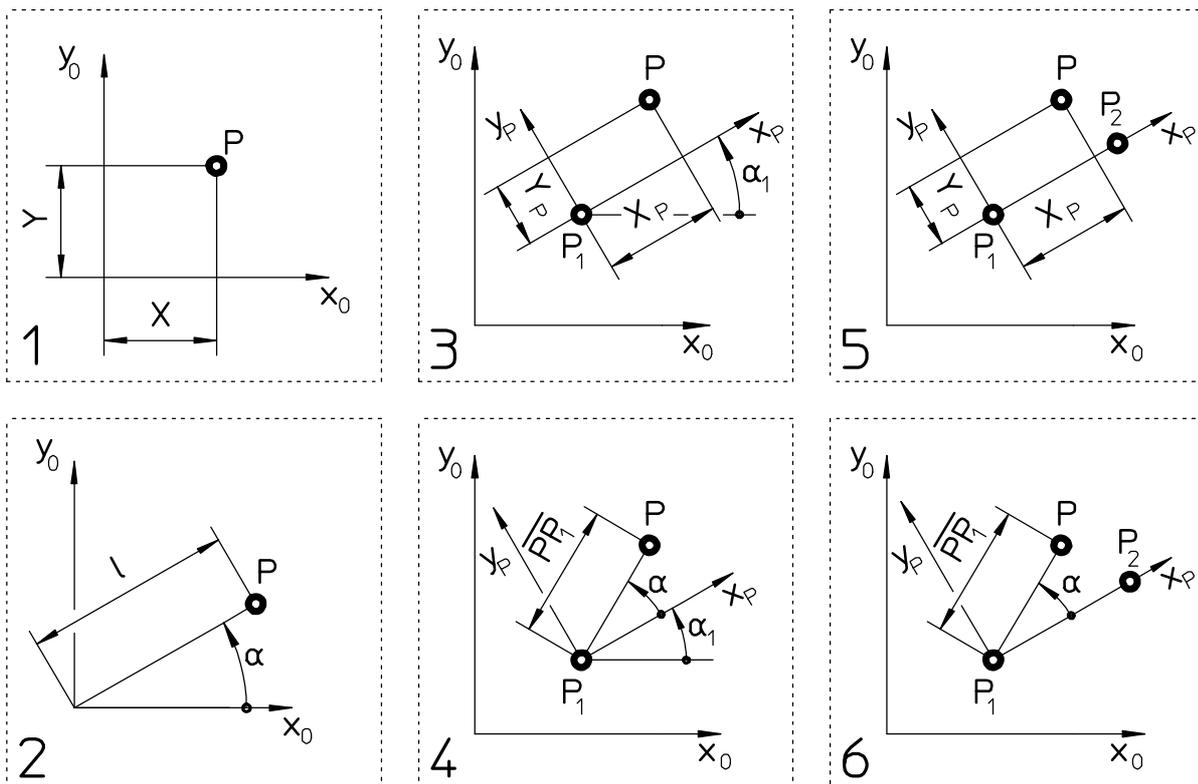


Bild 5.15: Darstellungen der Koordinatensysteme aus Tafel 5.3

Die elf in Tabelle 5.3 (S. 139) und Tabelle 5.4 (S. 142) aufgelisteten Möglichkeiten für die dialoggeführte Beschreibung der Lage eines Punktes lassen sich programmintern leicht in raumfeste Koordinaten umrechnen (siehe [25] und [33]), wie sie von den FEM-Programmen SAM, SPACAR und FEMAN2 benötigt werden.

Um nach einer Variation von einem oder mehreren Parametern die neue Lage des Mechanismus ermitteln zu können, wird in einer ersten Programmschleife festgestellt, welche Punkte des Mechanismus sich aufgrund der Parameteränderung(en) verschieben. Liegt dem Mechanismus z. B. Tabelle 5.2 (S. 138) zugrunde, so werden in jedem Schleifendurchgang diejenigen Punkte markiert, von denen sich Parameter geändert haben oder

von denen mindestens ein Bezugspunkt eine solche Markierung aufweist. Diese Schleife wird so lange nicht verlassen, bis sich innerhalb eines Durchlaufs kein neu zu verschiebender Punkt mehr findet. [Da die Punkte in Tabelle 5.2 (S. 138) schon für diese Vorgehensweise sinnvoll geordnet sind, ist das bereits im zweiten Schleifendurchlauf der Fall.]

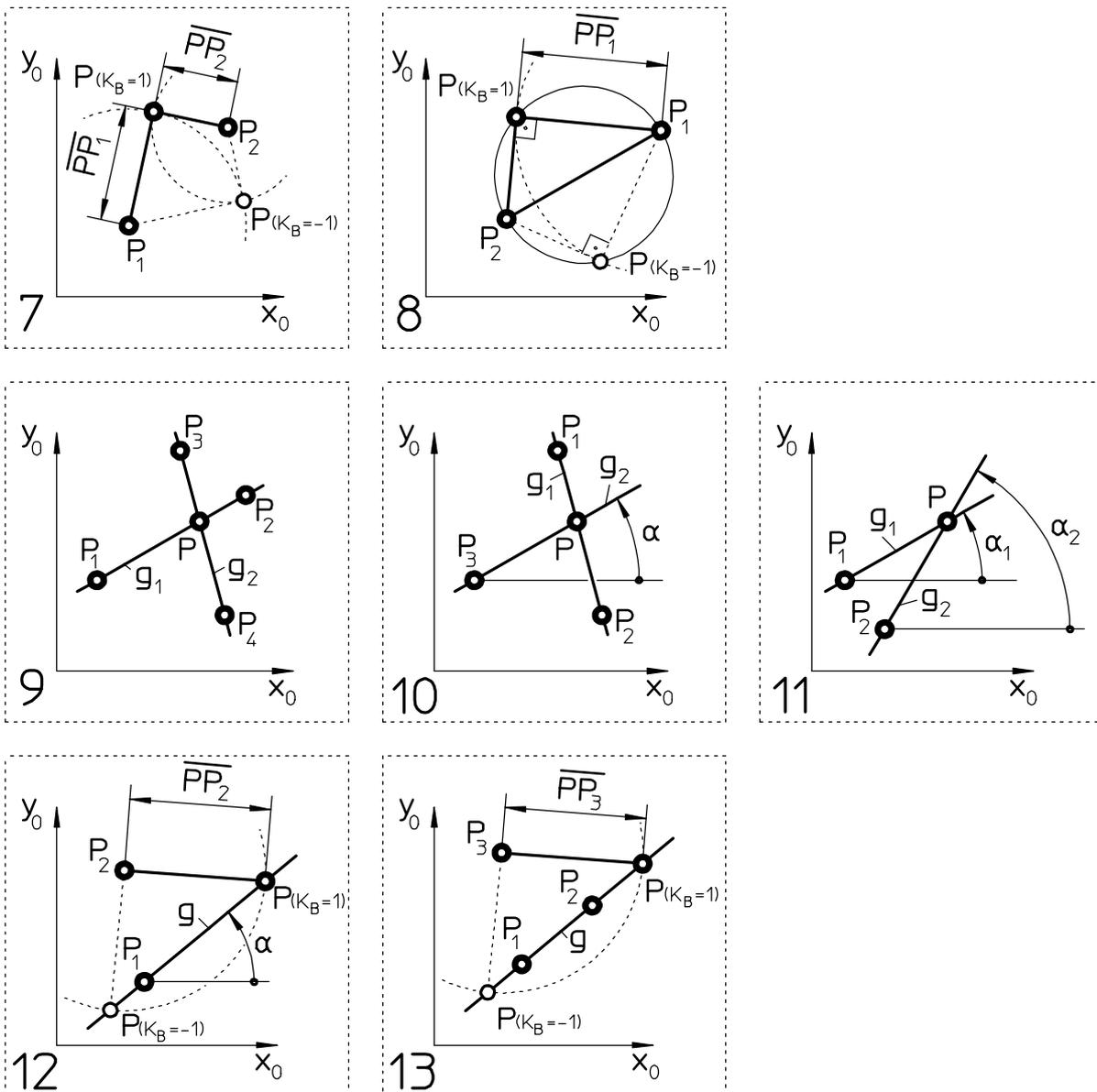


Bild 5.16: Darstellungen der Lagedefinitionen von Punkten aus Tafel

Anschließend wird eine weitere Schleife begonnen, in der alle als „zu verschieben“ markierten Punkte daraufhin untersucht werden, ob die Lagen ihrer Bezugspunkte diese Markierung nicht aufweisen. Ist das der Fall, wird die neue Lage des betreffenden Punktes ermittelt und die Markierung des verschobenen Punktes entfernt. Diese Schleife wird so-

lange wiederholt, bis kein Punkt mehr eine Markierung aufweist. Bei dem Mechanismus in Tabelle 5.2 (S. 138) ist das schon nach dem 1. Schleifendurchlauf der Fall.

Somit steht ein Programm zum Erproben der vorgeschlagenen Vorgehensweise zur Verfügung.

5.1.3.2.2 Der numerische Anteil des Algorithmus

Aus [30] kann der Sourcecode des FEM-Programms mit dem numerischen Algorithmus entnommen werden, der es erlaubt, den Antriebswinkel φ_1 des in Bild 5.10 (S. 131) gezeigten Mechanismus zu verwenden. Das Programm FEMAN2 ermöglicht es, in wenigen Antriebsschritten den Mechanismus aus einer Lage mit $\varphi_1 \approx 180^\circ$ in eine Lage mit $\varphi_1 = 180^\circ$ bzw. aus einer Lage mit $\varphi_1 \approx 0^\circ$ in eine Lage mit $\varphi_1 = 0^\circ$ zu bringen und somit den Doppelpunkt D über einen Punkt der Selbstberührungskurve des viergliedrigen Gelenkgetriebes A_0ABB_0 zu legen. Hierfür ist sinnvollerweise die Routine zum Lesen des Eingabe-Datensatzes des zu analysierenden Mechanismus so abzuändern, daß die Daten direkt aus dem analytischen Anteil des Algorithmus (Abschnitt 5.1.3.2.1) übernommen werden können.

5.1.3.2.3 Abschätzen der Lage einer neuen Ausgangslösung

Bei der Entwicklung des Programms UEGK zum Ermitteln eines Astes der Übergangskurve mit Hilfe von Routinen, die den in den Abschnitten 5.1.3.2.1 und 5.1.3.2.2 erwähnten Programmen PRE_SAM und FEMAN2 entnommen wurden, traten einige Probleme beim Ermitteln der Übergangskurvenpunkte auf. Wie diese Probleme gelöst werden können, soll in diesem Abschnitt erläutert werden.

Wie in Abschnitt 5.1.3.2 erwähnt, bewirkt eine Variation des Winkels φ_2 in Bild 5.10 (S. 131) mit jeweils der gleichen Schrittweite $\Delta\varphi_2$ eine unterschiedlich große Veränderung der Positionen der Gelenkpunkte des Getriebes in Abhängigkeit von der Ausgangslage des Mechanismus. Eine einfache Möglichkeit, den Einfluß auf diese Veränderung in der Form eines Zahlenwertes auszudrücken, ist die Bildung des Verhältnisses $\Delta\varphi_2 / \Delta\varphi'_2$, mit dem die Veränderung der Lage des Antriebswinkels des viergliedrigen Getriebes $A_0A'B'B_0$ von der Änderung des Lage des Getriebes A_0ABB_0 erfaßt wird.

Um die Variation des Winkels φ_2 sinnvoll steuern zu können, werden folgende Regeln eingeführt:

- 1) Ist der Winkel $\Delta\varphi'_2$ mehr als doppelt so groß wie der Betrag des vom Benutzer gewählten Winkels $\Delta\varphi_{2\text{geg}}$, so wird $\Delta\varphi_2$ halbiert.
- 2) Ist dagegen $\Delta\varphi_{2\text{geg}}$ zweieinhalbmal so groß wie $|\Delta\varphi'_2|$, so wird $\Delta\varphi_2$ verdoppelt mit der Einschränkung, daß $\Delta\varphi_2$ nie größer als $\Delta\varphi_{2\text{geg}}$ werden darf. (Daß hier zweieinhalbmal

so groß statt doppelt so groß verwendet wird, dient dem Vermeiden des ständigen Wechsels zwischen Regel 1 und Regel 2.)

- 3) Sollte eintreten, daß $\Delta\varphi_2$ kleiner als ein Zehntel von $\Delta\varphi_{2\text{geg}}$ wird, so werden die Getriebe A_0ABB_0 und $A_0A'B'B_0$ und somit auch die Winkel φ_2 und φ'_2 getauscht sowie $\Delta\varphi_2$ gleich dem ursprünglichem Wert $\Delta\varphi_{2\text{geg}}$ gesetzt. Auf diese Weise wird erreicht, daß $\Delta\varphi_2$ immer zwischen sinnvollen Grenzen liegt. Es ist bei diesem Wechsel zu beachten, daß ggf. das Vorzeichen von $\Delta\varphi_2$ zu ändern ist. Dies ist der Fall, wenn $\Delta\varphi_2$ und $\Delta\varphi'_2$ unterschiedliche Vorzeichen aufweisen.

Um Sonderlagen wie z. B. Verzweigungslagen zu überwinden, wird folgende Maßnahme eingeführt:

- Kann keine Lösung gefunden werden, so wird bis zu viermal versucht, durch Ändern des Antriebswinkels φ_2 um $\Delta\varphi_2$ eine sinnvolle Ausgangslösung zu bilden.

Zusätzlich muß folgendes beachtet werden:

- Wird bei umlaufendem Glied 1 das Minimum des Winkels φ_2 erreicht, muß mit dessen Maximum fortgefahren werden und umgekehrt. (Das Minimum und das Maximum bilden in der Regel eine Sonderlage, so daß diese beiden Lagen im allgemeinen zu keiner Lösung führen und deshalb der Winkel $\Delta\varphi_2$ ein oder mehrmals zum Maximum bzw. Minimum addiert werden muß - s. o.)
- Falls die Momentanpole P_{20} und P'_{20} mehrmals aufeinanderfolgend übereinander liegen, wurde in eine Grenzlage verzweigt, die keinen Selbstberührungspunkt zum Ergebnis hat. Die Suche muß abgebrochen und mit der Lage vor dem ersten Erreichen dieser Grenzlage fortgesetzt werden.
- Durch Transformation der Selbstberührungskurve in die Koppellebene erhält man die Übergangskurve. Nehmen mehrere aufeinander folgende Übergangskurvenpunkte innerhalb vorgegebener Grenzen die gleiche Position ein, so verzweigte der Mechanismus in einen Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{\text{üd}}$ (Bild 5.17). Die Suche ist in diesem Fall dort wieder aufzunehmen, wo aufeinanderfolgende Übergangskurvenpunkte größere Abstände aufweisen.
- Weist die Funktion der Änderung des Abstandes zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Selbstberührungspunkten plötzlich einen Sprung auf (das ist bei genügend vielen Punkten auch bei einer Asymptote nicht der Fall), so wurde ein Ast der Selbstberührungskurve verlassen. Es sollte versucht werden, den ursprünglichen Ast weiterzuverfolgen.

Trotz des Beachtens aller geschilderten Punkte ist nicht gewährleistet, daß ein Ast der Selbstberührungskurve nicht verlassen wird und daß aus einer Startposition der Mechanismus in einen neuen Selbstberührungspunkt verschoben werden kann. Zum Finden der gesuchten Lösung ist es daher sinnvoll, auch den Winkel φ'_2 in der Ausgangslage zu

modifizieren, sobald für ihn Vorhersagen möglich sind. Dies ist schon ab der dritten Suche eines Selbstberührungspunktes möglich. Hierzu wird der Winkel φ'_2 der letzten gefundenen Lösung um $\Delta\varphi'_2$ erhöht, wobei $\Delta\varphi'_2$ beim Ermitteln der ersten beiden Selbstberührungspunkte auf jeden Fall den Wert Null und anschließend ggf. die Differenz zwischen dem letzten und dem vorletzten Wert des Winkels φ'_2 zugewiesen bekommt. Dabei ist der Wert Null statt der Differenz dann zu verwenden, wenn die Differenz zu keiner Lösung oder zu einem Sprung auf einen anderen Ast der Selbstberührungskurve geführt hat.

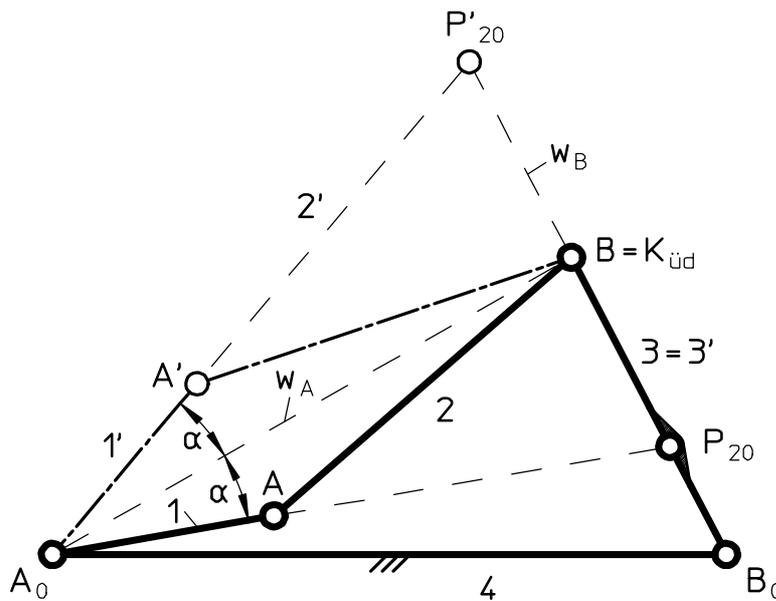


Bild 5.17: Die beiden zu einem Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{\ddot{u}d}$ eines viergliedrigen Gelenkgetriebes gehörenden Getriebelagen

5.1.3.3 Sonderlagen

Der in Bild 5.10 (S. 131) dargestellte Mechanismus durchläuft mehrere Verzweigungslagen. Diese stellen zwar für den in Abschnitt 5.1.3.2.1 beschriebenen analytischen Anteil des Algorithmus für das Auffinden von Selbstberührungspunkten von viergliedrigen Gelenkgetrieben kein Problem dar, aber fährt der nachfolgende numerische Anteil des Algorithmus den Mechanismus in die Verzweigungslage, so versagt der Algorithmus.

Sonderlagen führen andererseits oft zu einfachen Lösungen, die ggf. als Ausgangssituation für das Auffinden von Selbstberührungskurven genutzt werden können. Deshalb soll in diesem Abschnitt auf einige Sonderlagen eingegangen werden.

5.1.3.3.1 Innere und äußere Gestellage

Bei umlauffähigen und durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben kann Glied 1 des in Bild 5.10 (S. 131) skizzierten Mechanismus die innere Gestellage ($\varphi_2 = 0^\circ$) und gleichzeitig Glied $5 \equiv 1'$ die äußere Gestellage ($\varphi_2' = 180^\circ$) einnehmen (bzw. umgekehrt). In diesem Fall befindet sich Glied $5 \equiv 1'$ in einer Verzweigungslage, da es sich beim Verwenden des Antriebswinkels φ_1 im oder entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn weiterbewegen kann.

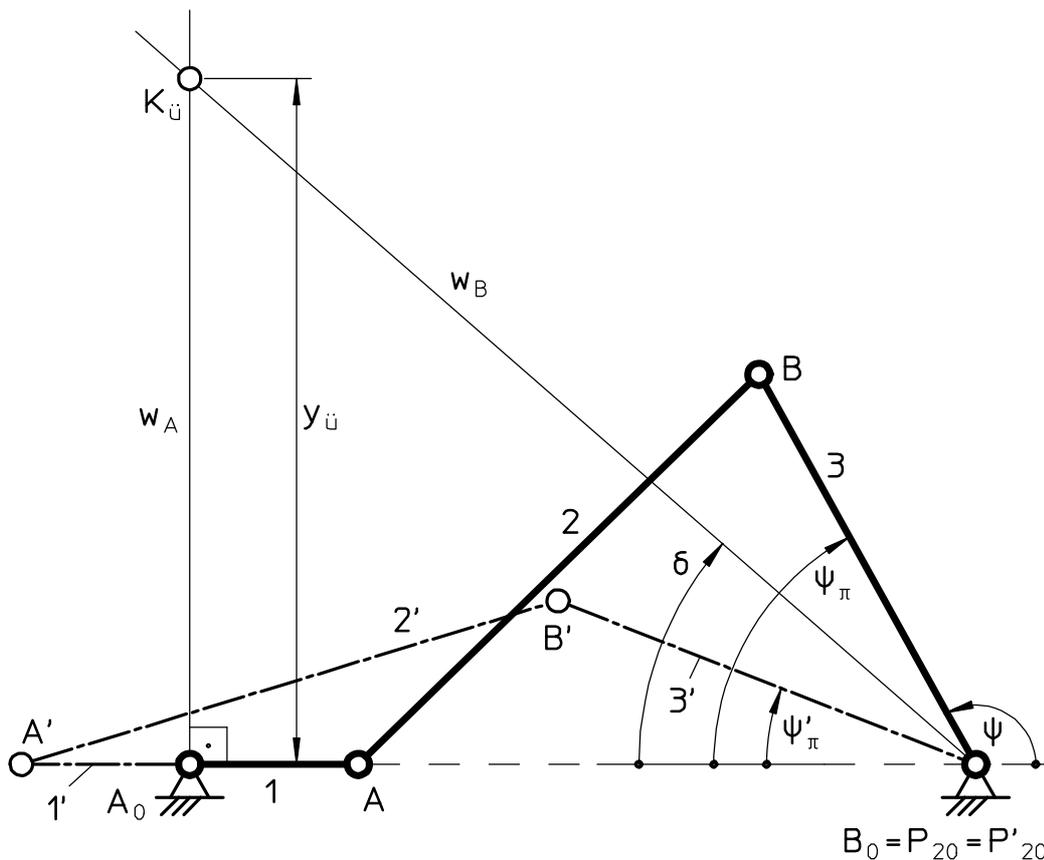


Bild 5.18: Übergangskurvenpunkt $K_{\ddot{u}}$ in der inneren (A_0ABB_0) und der äußeren Gestellage ($A_0A'B'B_0$) einer Kurbelschwinge

Bei umlauffähigen Getrieben - da bei Doppelschwingen diese Lagen nicht auftreten können also bei Kurbelschwingen und Doppelkurbeln - liegen zwar die Momentanpole P_{20} und P'_{20} in dieser Konstellation übereinander (Bild 5.18). Da dies aber aufgrund der Tatsache der Fall ist, daß sie sich in einem Selbstschnittpunkt der Rastpolkurve befinden und nicht im „gleichen Ast“ der Rastpolkurve, tritt in dieser Position trotzdem ein Übergangskurvenpunkt auf. Dieser liegt im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_A und w_B , wobei w_B gleichzeitig die Gerade ist, auf der beide Momentanpole und der Übergangskurvenpunkt liegen.

Mit Hilfe des Kosinussatzes folgt aus Bild 5.18 für den Ergänzungswinkel ψ_π zum Abtriebswinkel ψ

$$\psi_\pi = \arccos \frac{(\ell_4 - \ell_1)^2 + \ell_3^2 - \ell_2^2}{2 \cdot (\ell_4 - \ell_1) \cdot \ell_3} . \quad (5.21)$$

Für die mit einem Strich gekennzeichnete (äußere Gestell-) Lage des Getriebes gilt:

$$\psi'_\pi = \arccos \frac{(\ell_4 + \ell_1)^2 + \ell_3^2 - \ell_2^2}{2 \cdot (\ell_4 + \ell_1) \cdot \ell_3} . \quad (5.22)$$

Der Winkel δ der Winkelhalbierenden w_B zum Gestell kann mit Hilfe des arithmetischen Mittels

$$\delta = \frac{\psi_\pi + \psi'_\pi}{2} \quad (5.23)$$

ermittelt werden. Da sich der Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ senkrecht über dem gestellfesten Gelenk A_0 befindet, folgt für seine Koordinaten

$$x_{\ddot{u}} = 0 \quad (5.24)$$

sowie

$$y_{\ddot{u}} = \ell_4 \cdot \tan(\delta) . \quad (5.25)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (5.23) in Gleichung (5.25) folgt

$$y_{\ddot{u}} = \ell_4 \cdot \tan\left(\frac{\psi_\pi + \psi'_\pi}{2}\right) . \quad (5.26)$$

Da sich bei durchschlagfähigen Getrieben die Glieder 3 und $7 \equiv 3'$ ebenfalls in der äußeren und der inneren Gestellage befinden, wenn die Glieder 1 und $5 \equiv 1'$ des in Bild 5.10 (S. 131) abgebildeten Mechanismus die innere und die äußere Gestellage einnehmen, stehen beide Winkelhalbierenden senkrecht auf dem Gestell und schneiden einander daher nicht im Endlichen.

5.1.3.3.2 Zweifache innere oder zweifache äußere Gestellage

Bei totalschwingfähigen Gelenkgetrieben und bei durchschlagfähigen Gelenkgetrieben, die eine zweifach pro Periode umlaufende Kurbel aufweisen, können Glied 1 und gleichzeitig Glied $5 \equiv 1'$ des in Bild 5.10 (S. 131) skizzierten Mechanismus die innere Gestellage ($\varphi_2 = \varphi'_2 = 0^\circ$ - Bild 5.19) oder die äußere Gestellage ($\varphi_2 = \varphi'_2 = 180^\circ$) einnehmen, ohne daß sich die Teilgetriebe A_0ABB_0 und $A_0A'B'B_0$ in der gleichen Lage befinden. In dieser Konstellation durchläuft Glied $5 \equiv 1'$ in Bild 5.10 (S. 131) eine Verzweigungslage, da es sich beim Verwenden des Antriebswinkels φ_1 im oder entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn aus dem Stillstand herausbewegen kann.

Bei totalschwingfähigen Getrieben liegen in dieser Konstellation die Momentanpole P_{20} und P'_{20} übereinander (Bild 5.19). Die Winkelhalbierende w_B nimmt die gleiche Lage wie die Winkelhalbierende w_A ein, die mit der Geraden A_0A identisch ist. Damit ist der Doppelpunkt D im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_A und w_B theoretisch nur über eine Grenzfallbetrachtung bestimmbar. Wie bei einem Vergleich mit Bild 5.17 (S. 147)

ersichtlich, befindet sich der Punkt A (analog zum Punkt B in Bild 5.17) allerdings in einem Doppelpunkt seiner Bahn, weshalb auf eine Grenzfallbetrachtung verzichtet werden kann. Der Punkt A ist also in dieser Lage gleichzeitig ein Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{üd}$, für den die Bedingungen entsprechend Bild 5.17, S. 147 (nach Vertauschen der Glieder 1 und 3 und damit auch der Punkte A und B) erfüllt sind.

Bei durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben stellen die zweifache innere oder die zweifache äußere Gestellage Verzweigungslagen dar. Analog zu den totalschwingfähigen Getrieben befinden sich der Koppelpunkt A - und gleichzeitig der Koppelpunkt B - über einem Doppelpunkt, und beide Punkte sind Dauer-Übergangskurvenpunkte. Zusätzlich stellt die Koppelgerade AB aufgrund der Verzweigungslage (vgl. Abschnitt 2.5.3.1) eine Schein-Übergangskurve dar.

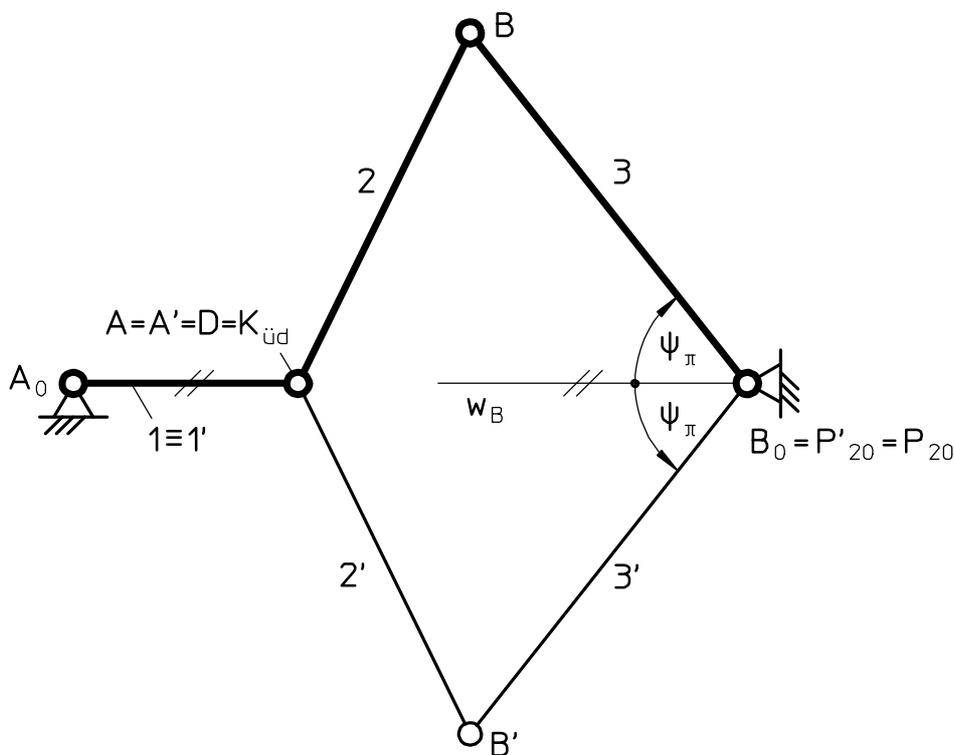


Bild 5.19: Die beiden inneren Gestellagen einer totalschwingfähigen Doppelinnenschwinge

5.1.3.3 Gestellgerade als Symmetrieachse zweier Getriebelagen

Totalschwingfähige und durchschlagfähige viergliedrige Gelenkgetriebe können eine an der Gestellgeraden gespiegelte Lage einnehmen (Bild 5.20). Der Doppelpunkt D beider Lagen liegt dann im Schnittpunkt der beiden Koppelgeraden AB und A'B'. Befindet sich

in dieser Lage der Momentanpol P_{20} auf der Normalen $n_{A_0B_0}$ zum Gestell A_0B_0 durch den Punkt D , so handelt es sich bei dem Doppelpunkt D um einen Selbstberührungspunkt, da der Momentanpol P'_{20} aufgrund der Symmetrie der beiden Lagen ebenfalls auf der Normalen n liegt.

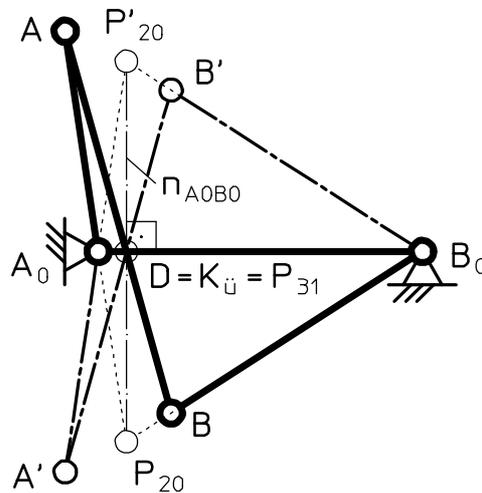


Bild 5.20: Zwei zur Gestellgeraden symmetrische Getriebebelagen, die zu einem Selbstberührungspunkt $K_{\ddot{u}}$ gehören

Die gleichen Bedingungen werden von der Getriebebelage erfüllt, in der eine Schnabelspitze auftritt (vgl. Abschnitt 3.4). Die gewünschte Lage des Getriebes kann also mit Hilfe von einem der beiden in Abschnitt 3.4 beschriebenen Algorithmen ermittelt werden. Der Punkt über dem Momentanpol P_{20} erzeugt in diesem Fall also eine Bahn mit einer Schnabelspitze und der Punkt über dem Hilfspol P_{31} eine Bahn mit einem Selbstberührungspunkt, wenn die am Gestell gespiegelte Lage des Getriebes (vgl. Bild 5.20) ebenfalls durchlaufen wird.

Lässt sich auf diese Weise ein Selbstberührungspunkt von durchschlagfähigen Gelenkgetrieben ermitteln - was z. B. bei Getrieben mit zweifach umlaufendem Antrieb und schwingendem Abtrieb in der Regel möglich ist - so erzeugt der zu dem gefundenen Selbstberührungspunkt gehörende Übergangskurvenpunkt eine Koppelpunktbahn mit zwei Selbstberührungspunkten (vgl. Bild 3.6, S. 48), da jeder Punkt der Koppelgeraden von durchschlagfähigen Getrieben auf der Schein-Übergangskurve liegt.

5.1.3.3.4 Identische Lage von An- oder Abtriebsglied innerhalb einer Periode

Bei allen ebenen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken, die ein im Gestell gelagertes schwingendes oder aber zweifach umlaufendes Glied aufweisen, gibt es zu

jeder Getriebelage eine zweite Lage, in der das schwingende oder das zweifach umlaufende Glied die gleiche Position aufweist.

Bild 5.17 (S. 147) zeigt eine solche Situation, in der das Glied 3 für beide Getriebelagen die gleiche Stellung eingenommen hat. Die Winkelhalbierende w_A ist in diesem Fall gleichzeitig die Symmetrieachse für die Lagen der Glieder 1 (vgl. Lage 1') und 2 (vgl. 2'). Die Winkelhalbierende w_B ist mit der Geraden B_0B identisch, auf der auch beide Momentanpole P_{20} und P'_{20} liegen. Der Doppelpunkt als Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden w_A und w_B liegt über dem Gelenk B und ist gleichzeitig ein Übergangskurvenpunkt, da er auf der Geraden ($w_B = B_0B$) durch die beiden Momentanpole P_{20} und P'_{20} liegt. Weil für jede Position des Punktes B eine solche Konstellation existiert, handelt es sich allerdings bei dem Übergangskurvenpunkt um einen Dauer-Übergangskurvenpunkt.

5.2 Die Übergangskurve einer allgemein eben bewegten Ebene

Ein Doppelpunkt ist gleichzeitig ein Übergangskurvenpunkt, wenn er mit den beiden zugehörigen Momentanpolen auf einer Geraden liegt. Ist für eine Getriebestellung die Doppelpunktkurve bzw. die Drehpolkurve bekannt, so ist nur noch zu ermitteln, von welchen Doppelpunkten die oben beschriebenen Bedingungen erfüllt werden.

5.2.1 Ermitteln der Drehpolkurve

Ist die Lage einer Ebene durch zwei Punkte A und B der Ebene und eine zweite Lage durch die mit Strich gekennzeichneten gleichen Punkte vorgegeben (Bild 2.4, S. 13), so liegt der Doppelpunkt und somit der Punkt der Drehpolkurve dieser Konstellation im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten $n_{AA'}$ und $n_{BB'}$ (vgl. Abschnitt 2.2.2).

Die Gleichung der Geraden AA' durch die Punkte A und A' (Bild 5.21) lautet nach [25] im allgemeinen

$$y_{AA'} = m_{AA'} \cdot x_{AA'} + b_{AA'} . \quad (5.27)$$

Die Steigung

$$m_{AA'} = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \quad (5.28)$$

dieser Geraden läßt sich bestimmen, wenn die Koordinaten der Punkte A und A' bekannt sind. Der Mittelpunkt $M_{AA'}$ der Strecke $\overline{AA'}$ läßt sich mit arithmetischen Mitteln berechnen:

$$x_{M_{AA'}} = x_A + \frac{1}{2} \cdot (x_{A'} - x_A) \quad \text{und} \quad (5.29)$$

$$y_{MAA'} = y_A + \frac{1}{2} \cdot (y_{A'} - y_A) . \quad (5.30)$$

Die Steigung der Mittelsenkrechten

$$m_{nAA'} = -\frac{1}{m_{AA'}} \quad (5.31)$$

kann als Kehrwert der Steigung der Geraden $m_{AA'}$ ermittelt werden [25]. Durch Einsetzen von Gleichung (5.28) in Gleichung (5.31) folgt

$$m_{nAA'} = -\frac{x_{A'} - x_A}{y_{A'} - y_A} . \quad (5.32)$$

Der Ordinatenschnittpunkt

$$b_{nAA'} = y_{MAA'} - m_{nAA'} \cdot x_{MAA'} \quad (5.33)$$

der Mittelsenkrechten $n_{AA'}$ lässt sich durch Einsetzen der Ergebnisse der Gleichungen (5.29), (5.30) und (5.32) in Gleichung (5.33) berechnen. Die Geradengleichungen für die Mittelsenkrechten

$$y_{nAA'} = m_{nAA'} \cdot x_{nAA'} + b_{nAA'} \quad \text{und} \quad (5.34)$$

$$y_{nBB'} = m_{nBB'} \cdot x_{nBB'} + b_{nBB'} \quad (5.35)$$

sind somit für den allgemeinen Fall bekannt.

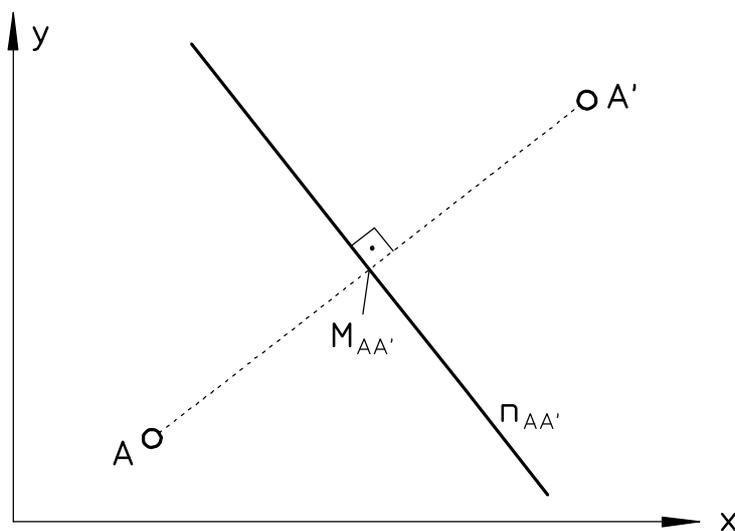


Bild 5.21: Die Mittelsenkrechte $n_{AA'}$ der Strecke $\overline{AA'}$

Die Gleichungen für die Koordinaten des Doppelpunktes D im Schnittpunkt der Normalen $n_{AA'}$ und $n_{BB'}$ (Bild 5.22) lauten somit im allgemeinen nach [25]:

$$x_D = \frac{b_{nAA'} - b_{nBB'}}{m_{nBB'} - m_{nAA'}} \quad \text{und} \quad (5.36)$$

$$y_D = m_{nAA'} \cdot x_D + b_{nAA'} . \quad (5.37)$$

Steht allerdings eine der Normalen - z. B. $n_{AA'}$ - senkrecht auf der x-Achse, so folgt für die x-Koordinate des Doppelpunktes aus Gleichung (5.29)

$$x_D = x_A + \frac{x_{A'} - x_A}{2}, \quad (5.38)$$

während die y-Koordinate weiter mit Hilfe von Gleichung (5.37) zu ermitteln ist.

Ist eine Normale - z. B. $n_{BB'}$ - dagegen parallel zur x-Achse, so folgt für die y-Koordinate des Doppelpunktes D analog zu Gleichung (5.30)

$$y_D = y_B + \frac{y_{B'} - y_B}{2} \quad (5.39)$$

und für die x-Koordinate durch Umstellen von Gleichung (5.37)

$$x_D = \frac{y_D - b_{n_{AA'}}}{m_{n_{AA'}}}. \quad (5.40)$$

Ist eine Normale - z. B. $n_{AA'}$ - senkrecht und die andere Normale - hier also $n_{BB'}$ - parallel zur x-Achse, so folgt aus den Gleichungen (5.29) und (5.30) für die Koordinaten des Doppelpunktes

$$x_D = x_A + \frac{x_{A'} - x_A}{2} \quad \text{und} \quad (5.41)$$

$$y_D = y_B + \frac{y_{B'} - y_B}{2}. \quad (5.42)$$

Sind beide Normalen parallel zueinander, d. h. weisen sie die gleichen Steigungen auf, so liegt der Doppelpunkt im Unendlichen.

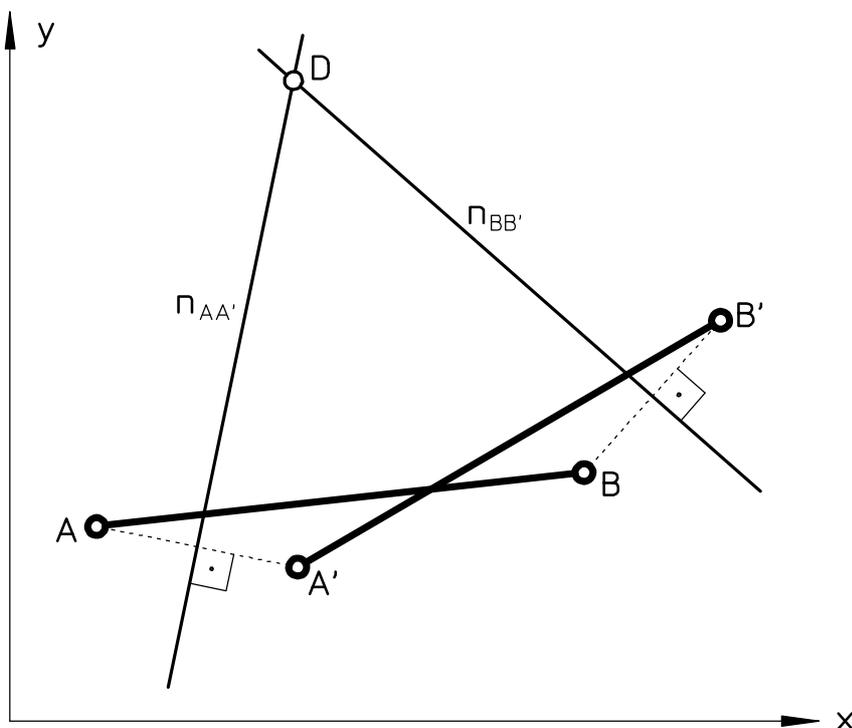


Bild 5.22: Konstruktion eines Doppelpunktes D der beiden Koppellagen AB und A'B'

5.2.2 Ermitteln des Momentanpols

Die Steigung der Tangente an die Bahn des Punktes A (Bild 5.23)

$$m_{vA} = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} \quad (5.43)$$

ist durch die Ableitungen der Koordinaten des Punktes A nach der Zeit oder aber nach der Antriebsgröße gegeben. Die Verbindungsgerade n_{vA} zwischen dem Punkt A und dem Momentanpol P_{x0} steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_A . Nach [25] folgt aus Gleichung (5.43) für ihre Steigung

$$m_{nvA} = -\frac{\dot{x}_A}{\dot{y}_A}, \quad (5.44)$$

und für ihren Ordinaten Schnittpunkt gilt

$$b_{nvA} = y_{nvA} - m_{nvA} \cdot x_{nvA} \quad (5.45)$$

mit $x_{nvA} = x_A$ und $y_{nvA} = y_A$.

Die Gleichungen zum Berechnen der Koordinaten des Momentanpols P_{x0} lauten demzufolge nach [25]

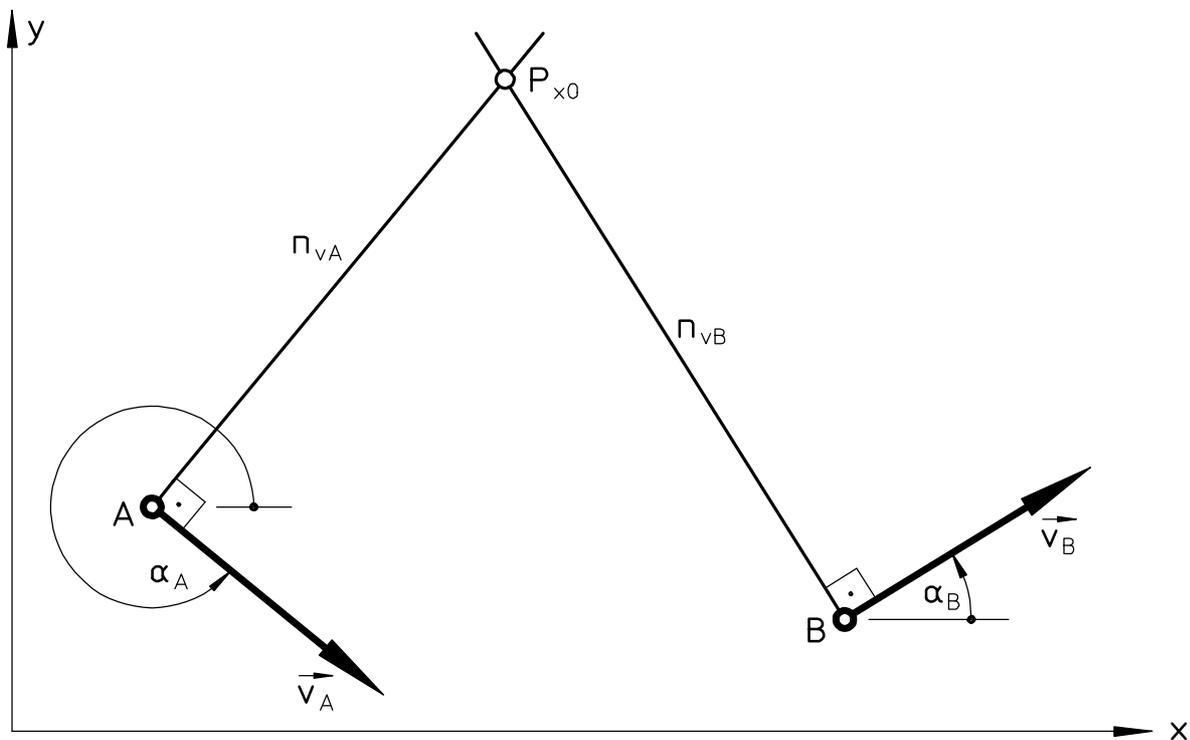


Bild 5.23: Ermitteln des Momentanpols P_{x0} mit Hilfe von zwei Punkten A und B einer Ebene und deren Geschwindigkeiten \vec{v}_A und \vec{v}_B

$$x_{Px0} = \frac{b_{nvA} - b_{nvB}}{m_{nvB} - m_{nvA}} \quad \text{und} \quad (5.46)$$

$$y_{Px0} = m_{nvA} \cdot x_{Px0} + b_{nvA} . \quad (5.47)$$

Ist die Tangente an die Bahn eines Punktes - z. B. des Punktes B - parallel zur x-Achse, so ist $\dot{y}_B = 0$, und der Momentanpol liegt auf der Senkrechten zur x-Achse durch den Punkt B. Deshalb gilt für die x-Koordinate des Momentanpols in diesem Fall

$$x_{Px0} = x_B , \quad (5.48)$$

während die y-Koordinate weiter mit Hilfe der Gleichung (5.47) berechnet werden kann.

Sind die Tangenten der Bahnen zweier Punkte einer Ebene parallel, so führt die Ebene eine Schiebung aus, und der Momentanpol liegt im Unendlichen.

5.2.3 Transformation von Punkten aus der Gestellebene in die Koppellebene

Um aus gestellfesten Punktefolgen wie z. B. der Rastpolkurve, der Drehpolkurve und der Selbstberührungskurve koppelfeste Punktefolgen wie z. B. die Gangpolkurve, die Doppelpunktkurve und die Übergangskurve zu erzeugen, müssen die Punkte dieser Punktefolgen aus dem gestellfesten Koordinatensystem x_0, y_0 in das koppelfeste Koordinatensystem x_x, y_x transformiert werden.

Wird dieser Transformation Bild 5.8 (S. 126) mit den Koppelkoordinaten x_2, y_2 zugrunde gelegt, so gilt nach [25] analog zu den Gleichungen (5.17) bis (5.20)

$$x_x = (x_0 - x_{0A}) \cdot \cos(\gamma) + (y_0 - y_{0A}) \cdot \sin(\gamma) , \quad (5.49)$$

$$y_x = -(x_0 - x_{0A}) \cdot \sin(\gamma) + (y_0 - y_{0A}) \cdot \cos(\gamma) \quad (5.50)$$

und für die Rücktransformation

$$x_0 = x_x \cdot \cos(\gamma) - y_x \cdot \sin(\gamma) + x_{0A} , \quad (5.51)$$

$$y_0 = x_x \cdot \sin(\gamma) + y_x \cdot \cos(\gamma) + y_{0A} , \quad (5.52)$$

wobei die Koordinaten x_{0A}, y_{0A} des Punktes A im gestellfesten Koordinatensystem bekannt sein müssen.

5.2.4 Ermitteln der Übergangskurve mit Hilfe der Geraden durch den Doppelpunkt und beide zugehörigen Momentanpole

Die Gleichung für die Steigung der Geraden zwischen einem Doppelpunkt D und einem der beiden zugehörigen Momentanpole P_{x0} lautet

$$m_{DP_{x0}} = \frac{y_D - y_{P_{x0}}}{x_D - x_{P_{x0}}} \quad (5.53)$$

Es handelt sich bei dem Doppelpunkt um einen Übergangskurvenpunkt, wenn der Doppelpunkt D zusammen mit seinen beiden zugehörigen Momentanpolen P_{x0} und $P_{x0'}$ auf einer Geraden liegt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für die Steigungen der Geraden DP_{x0} und $DP_{x0'}$ gilt

$$m_{DP_{x0}} - m_{DP_{x0'}} = 0 \quad (5.54)$$

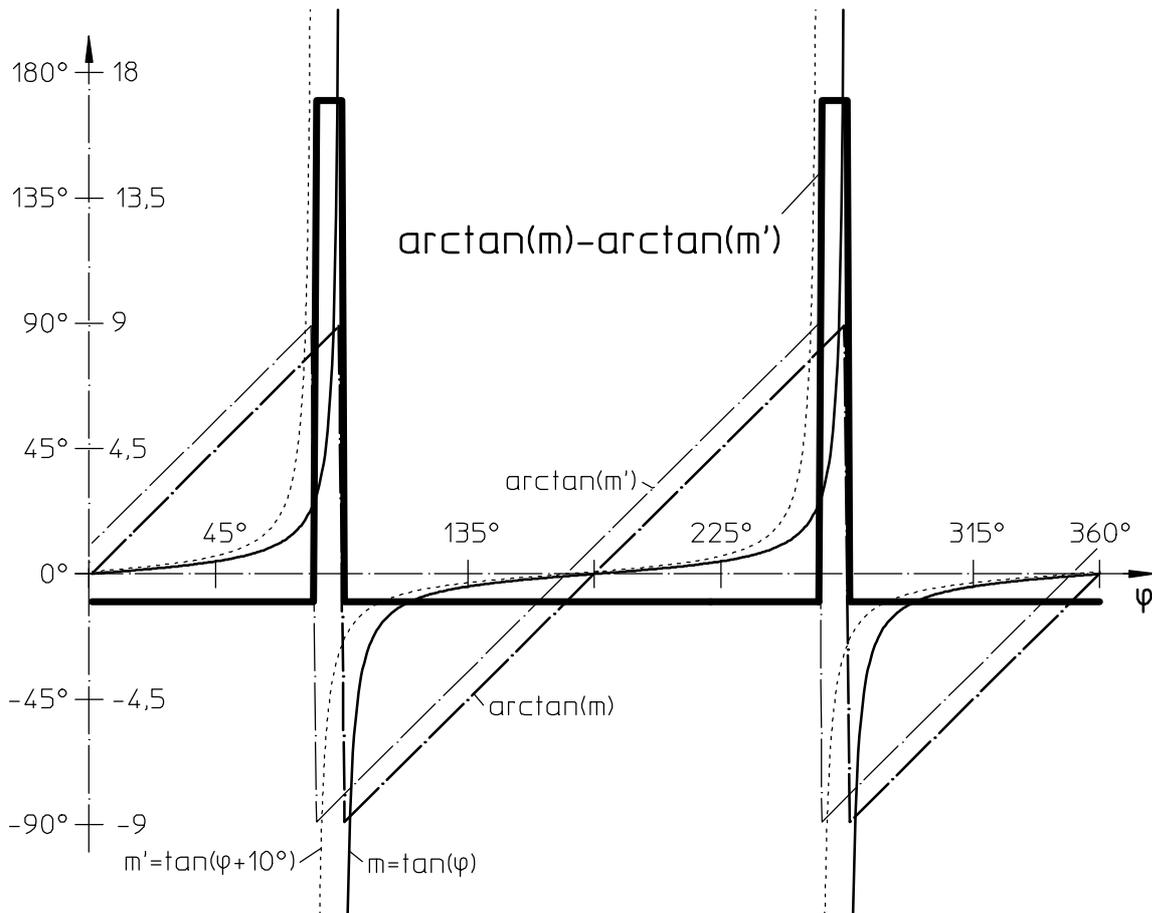


Bild 5.23a: Differenz $\arctan(m) - \arctan(m')$ für $m = \tan(\varphi)$ und $m' = \tan(\varphi + 10^\circ)$

Zum Abschätzen, wie groß die Differenz der Winkel beider Geraden ist, ist Gleichung (5.54) nicht geeignet, da bei gleichen Winkeldifferenzen die Steigungsdifferenz wächst, wenn sich eine der Geraden der Senkrechten zur x -Achse annähert. Daher ist in vielen Fällen eine Umrechnung der Steigung in einen Winkel sinnvoll, was aber mehr Rechenzeit benötigt. Aus Gleichung (5.54) wird dann

$$\arctan(m_{DP_{x_0}}) - \arctan(m_{DP_{x_0}'}) = 0^\circ. \quad (5.55)$$

Zu beachten ist, daß Gleichung (5.54) wie auch Gleichung (5.55) große Differenzen der Steigungen oder der Winkel der Geraden DP_{x_0} und DP_{x_0}' zur x -Achse ergeben, wenn beide Geraden nahezu auf dieser senkrecht stehen - jedoch eine steigt und die andere fällt (vgl. Bild 5.23a)

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Gleichungen (5.54) und (5.55) zu nutzen, um Übergangskurvenpunkte zu ermitteln:

- 1) Es sollen für jede gewünschte Getriebebelage alle auffindbaren Übergangskurvenpunkte ermittelt werden.
- 2) Ausgehend von einem Übergangskurvenpunkt (oder der Nähe eines Übergangskurvenpunktes) soll ein Ast der Übergangskurve gefunden werden.

Für beide Möglichkeiten wird im folgenden ein Algorithmus vorgestellt.

5.2.4.1 Algorithmus zum Auffinden aller Übergangskurvenpunkte

Das Auffinden aller Punkte einer Getriebebestellung, die möglicherweise einen Übergangskurvenpunkt darstellen, ist recht einfach. Sind die beiden Funktionen $m_{DP_{x_0}} = f(p)$ und $m_{DP_{x_0}'} = f(p)$ (Bild 5.24) gegeben in Abhängigkeit von einem Antriebsparameter, der Zeit oder aber einer laufenden Numerierung p in der Form einer Punktefolge, so gibt es für jeden Punkt der Punktefolge $m_{DP_{x_0}} = f(p_i)$ einen Punkt der Punktefolge $m_{DP_{x_0}'} = f(p_i)$ mit dem gleichen Wert p auf der x -Achse.

Werden die beiden Kurven $m = f(p)$ durch Verbinden benachbarter Punkte der Punktefolgen $m = f(p_i)$ durch Geradenstücke approximiert, so wird die Bedingung nach Gleichung (5.54)

$$m_{DP_{x_0}} - m_{DP_{x_0}'} = 0$$

erfüllt durch alle Schnittpunkte der beiden Funktionen $m_{DP_{x_0}} = (p)$ und $m_{DP_{x_0}'} = (p)$.

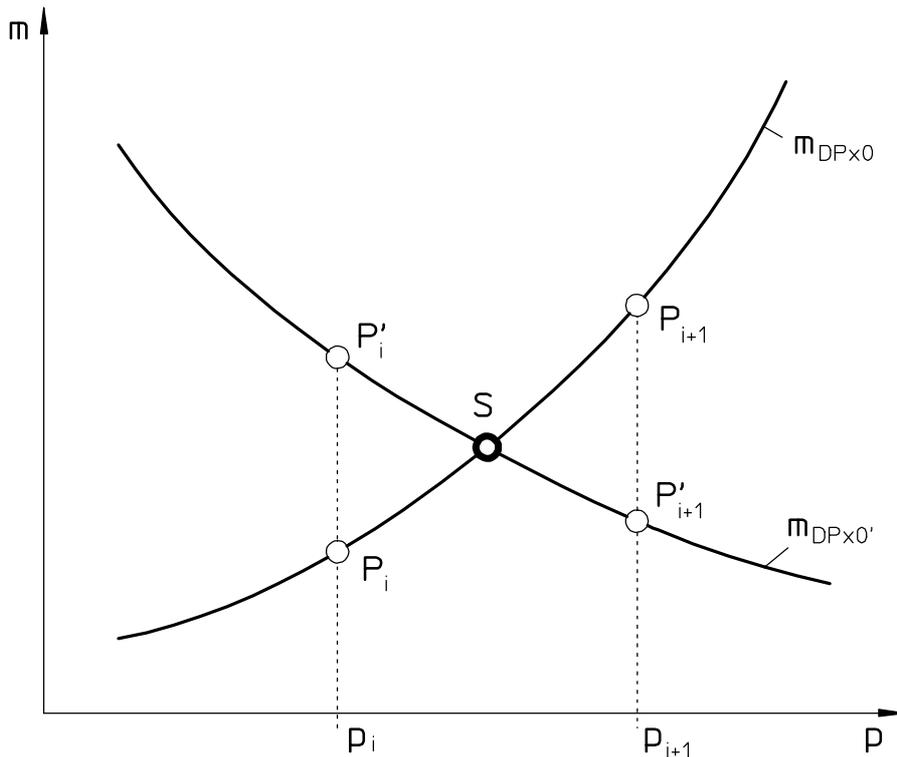


Bild 5.24: Schnittpunkt S von zwei als Punktfolgen P_i und P'_i gegebenen Funktionen m_{DPx0} und $m_{DPx0'}$

Ein Schnittpunkt tritt auf, wenn für Verbindungsgeraden von Punkten der beiden Punktfolgen mit gleichen Abszissenwerten für die Anfangspunkte (p_i) und die Endpunkte (p_{i+1}) (Bild 5.24) gilt:

$$\begin{aligned} & m_{DPx0}(p_i) \geq m_{DPx0'}(p_i) \text{ und } m_{DPx0}(p_{i+1}) < m_{DPx0'}(p_{i+1}) \\ \text{oder} & m_{DPx0}(p_i) \leq m_{DPx0'}(p_i) \text{ und } m_{DPx0}(p_{i+1}) > m_{DPx0'}(p_{i+1}) . \end{aligned} \tag{5.56}$$

Berührungspunkte beider Steigungsfunktionen lassen sich durch die Bedingung

$$|m_{DPx0}(p_i)| - |m_{DPx0'}(p_i)| = \min \tag{5.57}$$

finden, wobei ein Minimum daran erkannt wird, daß die Werte der Steigungsdifferenz für $p = (i-1)$ und $p = (i+1)$ größer als der Wert der Steigung für $p = (i)$ sind (Bild 5.25). Da der Wert für das Minimum in der Regel größer als Null ist, muß anhand einer Obergrenze oder durch andere Approximationsverfahren (z. B. interpolierende periodische kubische Splines) bzw. durch Berechnen weiterer Punkte der Punktfolgen festgestellt werden, ob das Minimum als Abstand Null oder als endlicher Abstand anzusehen ist. Bei der Entscheidung für das erstere handelt es sich um einen Übergangskurvenpunkt, ansonsten um keinen. Wegen dieser Unsicherheit ist für die Schnittpunktsuche die Bedingung (5.56) der Bedingung (5.57) vorzuziehen.

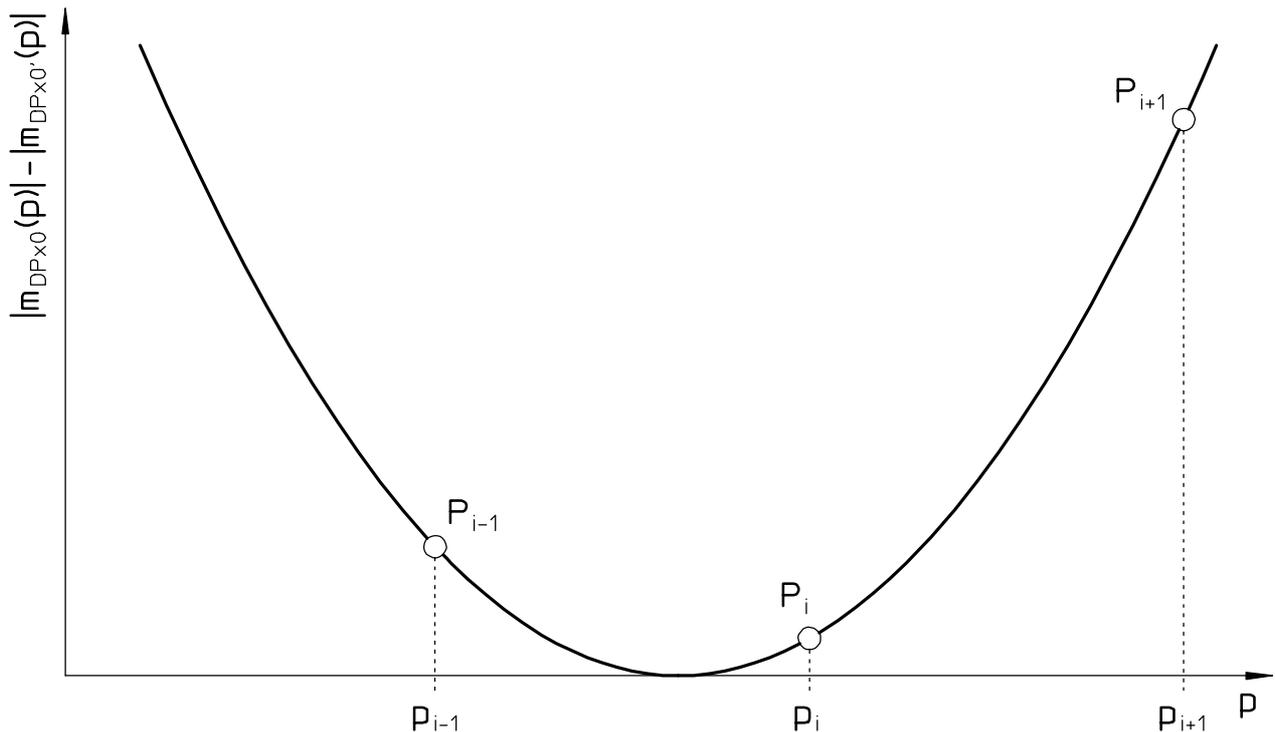


Bild 5.25: Das Minimum einer als Punktfolge P_i gegebenen Funktion

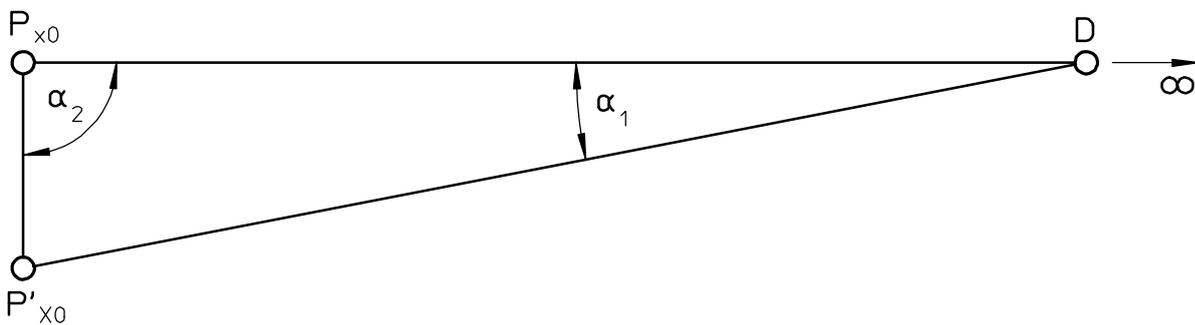


Bild 5.26: Bedingungen für einen Doppelpunkt D im Unendlichen, der kein Selbstberührungspunkt ist

Leider werden mit dem beschriebenen Verfahren auch Lösungen ermittelt, die nichts mit Übergangskurvenpunkten gemein haben:

- 1) Liegt der Doppelpunkt D im Unendlichen, so ist der Winkel α_1 (Bild 5.26) zwischen der Verbindungsgeraden DP_{x0} und DP'_{x0} zu beiden zugehörigen Momentanpolen (P_{x0} und P'_{x0}) in der Regel sehr klein, auch wenn die Punkte D , P_{x0} und P'_{x0} eindeutig nicht auf einer Geraden liegen. Ob es sich in dem geschilderten Fall bei dem Doppelpunkt D um einen Übergangskurvenpunkt handelt, lässt sich durch Überprüfen eines weiteren Winkels (α_2) des Dreiecks $\triangle P_{x0}DP'_{x0}$ herausfinden.

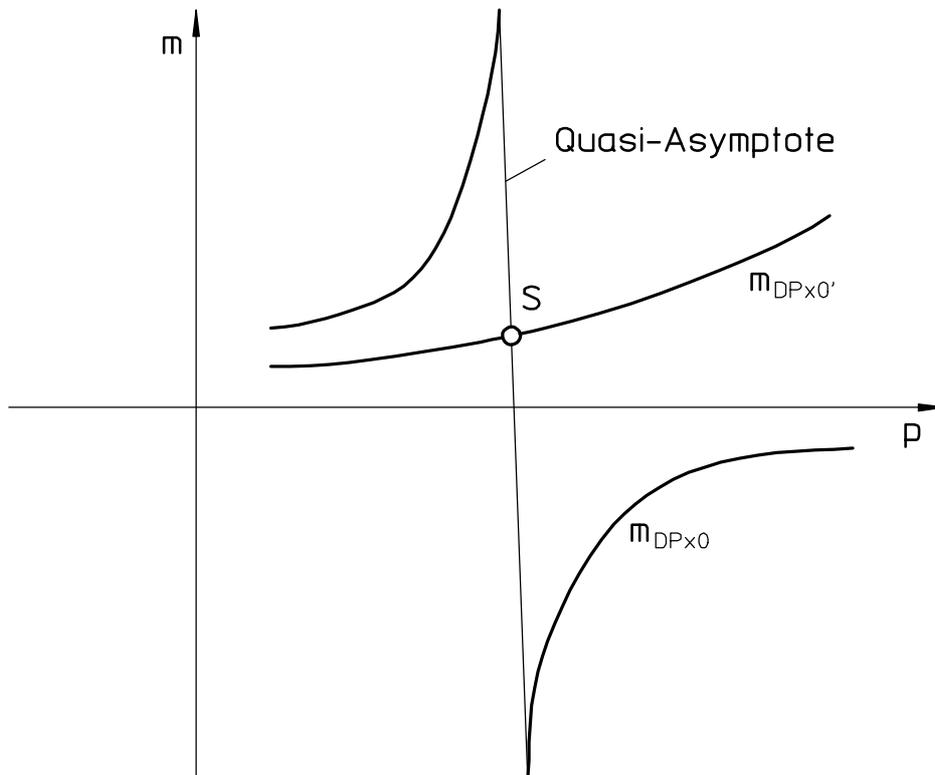


Bild 5.27: Schnittpunkt S zwischen einer Funktion $m_{DPx0'}$ und einer Quasi-Asymptoten einer anderen Funktion m_{DPx0}

- 2) Tritt eine Asymptote in einer der beiden Funktionen $m_{DPx0} = f(p)$ oder $m_{DPx0'} = f(p)$ auf, so schneidet die Quasi-Asymptote auf jeden Fall die andere der beiden Funktionen (Punkt S in Bild 5.27). Schnittpunkte mit der Quasi-Asymptote dürfen also nicht berücksichtigt werden. (Beim Verwenden von Winkeln [Gleichung (5.55)] anstatt von Steigungen [Gleichung (5.54)] entfallen zwar die Asymptoten. Es treten jedoch anstatt deren Sprünge durch die Bildung des Tangens auf, da der Tangens nur zwischen $+90^\circ$ und -90° definiert ist. Diese Sprünge führen zu gleichgelagerten Problemen wie die Quasi-Asymptoten aufgrund einer unendlich großen Steigung der Winkelfunktion bei einem Sprung des Winkels von $+90^\circ$ auf -90° oder umgekehrt .
- 3) Fällt der Doppelpunkt D mit den beiden zugehörigen Momentanpolen P_{x0} und $P_{x0'}$ zusammen, so handelt es sich um keinen Übergangskurvenpunkt. (Beide Momentanpole nehmen die gleiche Lage ein, wenn die beiden Lagen des zu untersuchenden Getriebes identisch sind. Diese singuläre Lösung muß für einen mathematischen Algorithmus ausdrücklich ausgeschlossen werden. Geschieht das nicht, erscheint die Gangpolkurve als Teil der Übergangskurve, da der Momentanpol und der Drehpol - der mit dem Doppelpunkt identisch ist [vgl. Abschnitt 2.6.1] - bei der hier beschriebenen singulären Lösung übereinander liegen.)

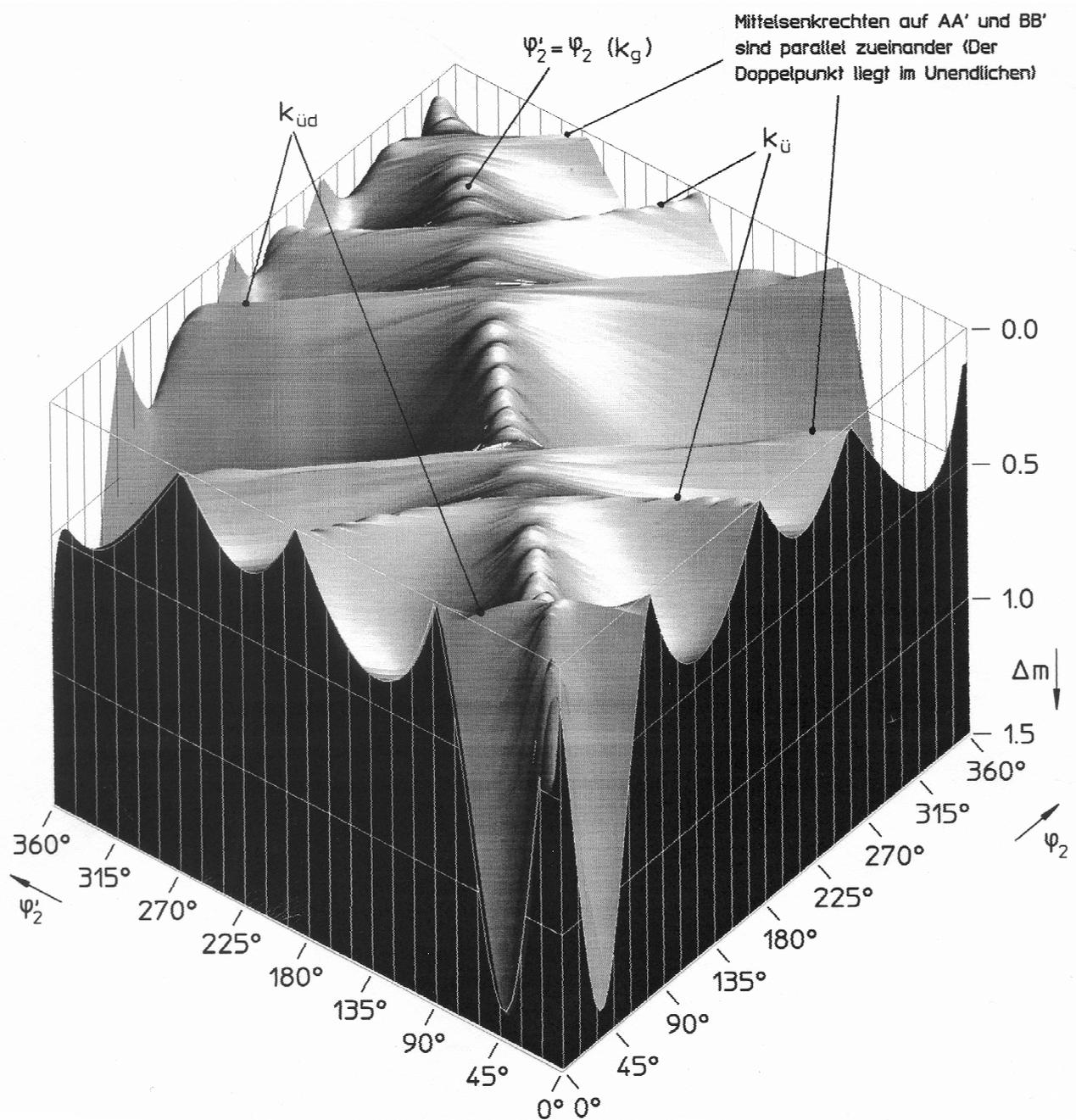


Bild 5.28: Steigungsdifferenz Δm [= $\tan(\psi_1)$ - s. Bild 5.10] zwischen den Geraden \overline{DP}_{20} und \overline{DP}'_{20} einer Kurbelschwinge als Funktion des Antriebswinkels ψ_2

- 4) Liegt der Doppelpunkt D über einem der beiden zugehörigen Momentanpole (also P_{x0} oder P'_{x0}), so handelt es sich nach [2] um keinen Übergangskurvenpunkt, sondern um einen Punkt der Gangpolkurve. Eine Ausnahme hiervon bilden Schnabelspitzen (vgl.

Bild 3.15, S. 57), die gleichzeitig eine Spitze und einen Übergangskurvenpunkt bilden [4].

- 5) Punkte der Dreifachpunktkurve (vgl. Bild 2.9, S. 18) werden zwar von dem beschriebenen Algorithmus gefunden. Sie stellen jedoch ebenfalls keine Übergangskurvenpunkte dar.
- 6) Dauer-Übergangskurvenpunkte sind ebenfalls zu entfernen, da sie nach R. Müller [2] nicht zu den Übergangskurvenpunkten zählen. Geschieht das nicht, bereiten sie bei der grafischen Ausgabe durch Stiftplotter Probleme, da sie für jede Getriebestellung gefunden werden und immer an der gleichen Stelle liegen. Der Stift durchstößt daher in der Regel durch das ständige Überzeichnen dieser Punkte das Papier.

Die Problematik bei der Suche eines Astes der Übergangskurve wird anhand von Bild 5.28 ersichtlich. In diesem Bild ist die Differenz zwischen den Steigungen der Geraden DP_{20} und der Geraden DP'_{20} über den Antriebswinkeln φ_2 und φ'_2 der beiden zu einem Doppelpunkt gehörenden Lagen einer umlauffähigen Kurbelschwinge aufgetragen. (Die Welligkeit der Höhenzüge und auch die Einschnitte am Bildrand links oben in Bild 5.28 entsprechen nicht der Wirklichkeit und sind auf den Algorithmus zurückzuführen, der aus den Höhenlinien das dreidimensionale Modell erzeugt, von dem die mit Schattierungen versehene Projektion in Bild 5.28 erzeugt wurde.) Der Höhenzug, der zur Ermittlung der Übergangskurve $k_{\ddot{u}}$ genutzt wird, schneidet den Höhenzug, der die Gangpolkurve k_g als Ermittlungsergebnis hervorbringt. In der Nähe dieses Schnittpunkts kann ein Verfolgen der Übergangskurve nur gewährleistet werden, wenn die Richtung des hierfür zu verfolgenden Höhenrückens bekannt ist. Zusätzlich wird das Zerteilen des gesuchten Höhenrückens in zwei Teile durch das Einteilen einer Periode in einen willkürlichen Abschnitt von 0° bis 360° ersichtlich. Des Weiteren sind zwei weitere Höhenrücken zu erkennen - die in dieser Abbildung in vier Höhenrücken zerfallen - die zu Kurven führen, die nicht zur Übergangskurve gehören. Es handelt sich hierbei um die geometrischen Orte der Dauer-Übergangskurvenpunkte $k_{\ddot{u}d}$ und derjenigen Doppelpunkte, die im Unendlichen liegen.

5.2.4.2 Algorithmus zum Auffinden eines Astes der Übergangskurve

Ist die Bewegung einer Ebene durch eine Funktion oder durch genügend viele Lagen der Ebene vorgegeben, so läßt sich für eine beliebige Lage der Ebene ein Übergangskurvenpunkt bestimmen.

Es wird davon ausgegangen, daß die Lage der Ebene durch die Position von zwei Punkten A und B der Ebene vorgegeben ist. Dann müssen die Bahnen beider Punkte als Funktion oder als Punktfolgen beschreibbar sein. Die meisten Analyseprogramme für Getriebe

(z. B. [6], [22], [27], [30], [31], [32], [33], [35]) liefern genauso wie MKS-Systeme (z. B. [36]) als Ergebnisse Punktfolgen gewünschter Punkte und deren 1. (und 2.) Ableitung nach der Zeit oder einem Antriebsparameter.

Liegen die Punkte der Punktfolgen in Abhängigkeit von einem Parameter p dicht genug beieinander, so läßt sich für jeden Zwischenwert des Parameters p die Lage der Punkte und deren Ableitung nach dem Parameter p angeben, wenn angemessene Approximationsverfahren zur Verfügung stehen. Für Gelenkgetriebe haben sich zum Beispiel interpolierende periodische kubische Splines [37] als sinnvolle Approximationsverfahren herausgestellt. Sind die Abstände der Punkte genügend klein gewählt⁸⁾ und die Position der Punkte genügend genau beschrieben⁹⁾, so liefern interpolierende periodische kubische Splines notfalls sogar genügend genaue Werte für die Ableitung der Lage des Punktes nach dem Parameter p . Diese Tatsache erlaubt es, die Ableitungen auch von den Lagen der Punkte einer Ebene zu bilden, wenn diese Lagen für eine Synthese nur theoretisch vorgegeben, für eine gute Approximation der Kurve jedoch sinnvoll positioniert sind.

Im folgenden wird ein Algorithmus vorgestellt, der - als Postprozessor für getriebetechnische Analyseprogramme eingesetzt - einen Ast der Übergangskurve einer Ebene ermittelt, wenn die Bewegung der Ebene und deren Ableitung nach dem Parameter p mit Hilfe des oben geschilderten Vorgehens genügend genau beschreibbar sind. Auf die Ableitung kann ggf. verzichtet werden, wenn die Rastpolkurve (als Punktfolge) bekannt ist. (Eine Integration des Algorithmus in ein Analyseprogramm verringert allerdings die Probleme, die aufgrund der Approximation in einigen Ebenenlagen immer wieder auftreten.)

Ist die Lage einer Ebene gegeben, in der ein Übergangskurvenpunkt gesucht werden soll, und ist für diese Suche eine Startposition einer weiteren Lage der Ebene gegeben, so handelt es sich bei dem zu beiden Lagen gehörenden Doppelpunkt D um einen Übergangskurvenpunkt, wenn für die Winkel $[\delta_1 =] \arctan(m_{DP_{x0}})$ (vgl. Bild 5.9, S. 129) und $[\delta_2 =] \arctan(m_{DP'_{x0}})$ der Verbindungsgeraden DP_{x0} und DP'_{x0} Gleichung (5.55)

$$\arctan(m_{DP_{x0}}) - \arctan(m_{DP'_{x0}}) = 0^\circ$$

erfüllt ist. Diese Gleichung läßt sich auch in der Form

$$\arctan\{m_{DP_{x0}}[A(p_0), B(p_0), A'(p), B'(p)]\} - \arctan\{m_{DP'_{x0}}[A(p_0), B(p_0), A'(p), B'(p)]\} = 0^\circ \quad (5.58)$$

schreiben, wobei die Null im Index bedeutet, daß dieser Parameter von der gewählten Lage der Ebene abhängig und somit nicht variabel ist. Beide Winkel lassen sich für vorgegebene Lagen mit Hilfe der Gleichungen (5.38) bis (5.40), (5.46) bis (5.48) sowie (5.53) ermitteln. Zur Suche der Nullstelle der Funktion

⁸⁾ Erfahrungsgemäß mindestens 360 Punkte pro Periode

⁹⁾ z. B. auf 16 Stellen genau

$$\arctan(m_{DP_{x_0}}) - \arctan(m_{DP'_{x_0}}) = f(p) \quad (5.59)$$

eignet sich das Näherungsverfahren Regula falsi [25], das mit Hilfe der linearen Interpolation einen verbesserten Näherungswert

$$p_3 = p_1 - \frac{(p_2 - p_1) \cdot f(p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} \quad (5.60)$$

bei Vorgabe der Startwerte p_1 und p_2 ermittelt. Die Startwerte müssen entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, weshalb sich der Algorithmus zum Ermitteln eines Übergangskurvenastes in drei Schritte gliedert:

- 1) Suchen von zwei Startwerten.
- 2) Ermitteln eines genügend genauen Wertes für einen Übergangskurvenpunkt.
- 3) Verschieben der Lage der Ebene für die Suche eines benachbarten Übergangskurvenpunktes durch Verändern der in Gleichung (5.58) von p_0 abhängigen Parameter und Sprung zu Schritt 1.

zu 1) Zum Suchen von zwei Startwerten werden für verschiedene Werte von p (p_1 und p_2) mit einer vorgegebenen Differenz $\Delta p = p_1 - p_2$ (Bild 5.29) Lösungen der Funktionen $f(p)$ nach Gleichung (5.59) ermittelt. Solange beide Lösungen $f(p_i)$ und $f(p_{i+1})$ gleiche Vorzeichen haben, wird ein weiterer Funktionswert $f(p_{i+2})$ gebildet, wobei $p_{i+2} = p_{i+1} + \Delta p$ gesetzt wird. Das Vorzeichen von Δp wird anhand der Funktionswerte von $f(p_1)$ und $f(p_2)$ so gewählt, daß $\text{sign}[f(p_3)]$ gegen $-\text{sign}[f(p_2)]$ strebt.

Tritt der Umstand ein, daß $|p_{i+1}| > |p_i|$ ist und kein Vorzeichenwechsel von $f(p)$ durchlaufen wurde (in Bild 5.29 ist das bei $i=5$ der Fall), so wird Δp durch zehn dividiert und die Suche bei $i=i-2$ (in Bild 5.29 bei $i=3$) fortgesetzt. Das Verändern von Δp wird solange wiederholt, bis ein Vorzeichenwechsel von $f(p)$ gefunden wird oder bis $|\Delta p|$ eine Schranke unterschritten hat, die eine erfolglose Suche signalisiert.

zu 2) Sind zwei Werte p_1 und p_2 gefunden, deren Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen aufweisen, so wird mit dem Näherungsverfahren *Regula falsi* [vgl. Gleichung (5.60)] ein Wert für p ermittelt, der einen Funktionswert $f(p)$ mit einer maximal zugelassenen Abweichung von Null ergibt. Die Koordinaten $x_D, y_D(p_0, p)$ geben nun die Lage des gesuchten Übergangskurvenpunktes D (vgl. Bild 5.11, S. 133) an.

zu 3) Anschließend wird der Wert p_0 um Δp_0 erhöht. Dies bewirkt ein Wechseln der Lage der Ebene, für die ein Übergangskurvenpunkt gesucht wird. Sobald für mehr als eine Lage der Ebene ein Übergangskurvenpunkt gefunden ist, wird analog zu Abschnitt 5.1.3.2.3 für die Suche in der neuen Lage der Wert von p der alten Lage

um Δp_{neu} erhöht, wobei Δp_{neu} die Differenz der Werte von p zwischen der alten und deren benachbarter Lage zugewiesen bekommt.

Um ein Verändern der Lagen aller Getriebeglieder als Folge einer Änderung des Parameters p_0 in Grenzen zu halten, wird Δp_0 halbiert, wenn das Verhältnis von Δp zu Δp_0 kleiner als 0,5 ist, und Δp_0 wird verdoppelt, wenn das Verhältnis größer als 3 ist. Dabei ist allerdings darauf zu achten, daß Δp_0 nie größer als sein ursprünglicher Wert wird. Sollte Δp_0 andererseits kleiner als ein Viertel des ursprünglichen Wertes werden, werden die Momentanpole P_{20} und P'_{20} vertauscht, was ebenfalls ein Vertauschen von Δp und Δp_0 bedeutet. Auf diese Weise werden die Veränderungen der Lagen der Glieder in Abhängigkeit von einem vorgegebenen Δp_0 in Grenzen gehalten.

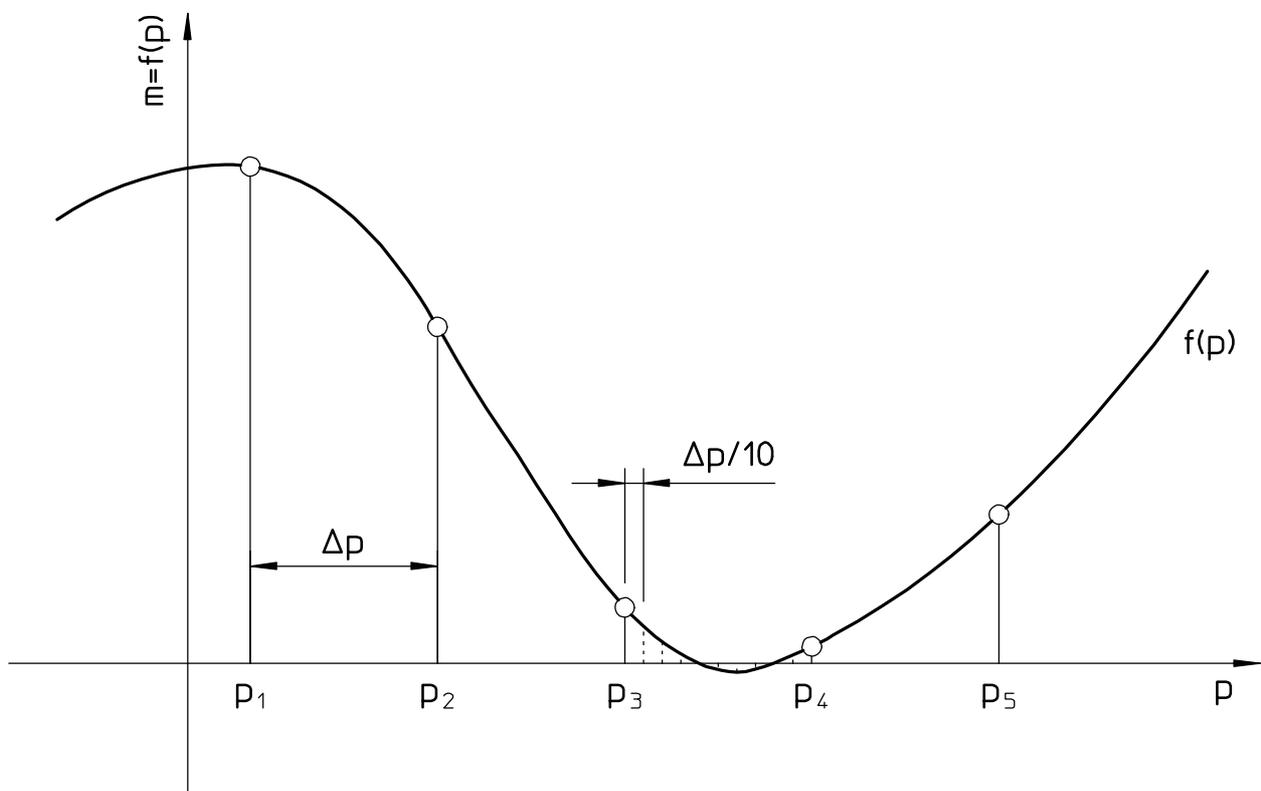


Bild 5.29: Suche nach einem Vorzeichenwechsel der Funktion $f(p)$

Analog zur Ermittlung eines Astes der Übergangskurve bei viergliedrigen Gelenkgetrieben (Abschnitt 5.1.3.2.3) sind bei der Variation der Parameter p_0 und p einige Regeln zu beachten:

- Falls die Momentanpole P_{20} und P'_{20} mehrmals aufeinanderfolgend übereinanderliegen, wurde in eine Grenzlage verzweigt, die keinen Selbstberührungspunkt zum Ergebnis hat. Die Suche muß abgebrochen und vor dem ersten Verzweigen in diese Grenzlage fortgesetzt werden.

- Durch Transformation der Selbstberührungskurve in die Koppalebene erhält man die Übergangskurve. Nehmen mehrere aufeinanderfolgende Übergangskurvenpunkte innerhalb vorgegebener Grenzen die gleiche Position ein, so verzweigt der Mechanismus in einen Dauer-Übergangskurvenpunkt (Bild 5.17, S. 147). Die Suche ist in diesem Fall dort wieder aufzunehmen, wo aufeinanderfolgende Übergangskurvenpunkte größere Abstände aufweisen.
- Weist die Funktion des Abstandes zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Selbstberührungspunkten plötzlich einen Sprung auf (das ist bei genügend vielen Punkten auch bei einer Asymptote nicht der Fall), so wurde ein Ast der Selbstberührungskurve verlassen. Ein solcher Sprung ist in der Regel an einer überdurchschnittlich großen Differenz der Werte des Parameters p von zwei benachbarten Punkten der Übergangskurve zu erkennen. Tritt ein solcher Fall ein, sollte versucht werden, den ursprünglichen Ast weiterzuverfolgen.
- Wird eine Übergangskurve k_u nach einer Spitze in umgekehrter Richtung durchfahren [vgl. die Spitzen in Bild 3.9 (S. 51) bei $\varphi=100^\circ$ bzw. bei $\varphi=258^\circ$], so liegt diese Spitze in der Regel über der Gangpolkurve. Dem Algorithmus macht es noch größere Schwierigkeiten, von der Spitze kommend weitere Übergangskurvenpunkte zu finden, als beim Annähern an die Spitze einen Ast der Übergangskurve weiter zu verfolgen. Aus diesem Grund wird die Suche nach Übergangskurvenpunkten in dieser Art von Spitze beendet, da ein Entfernen von ihr ja keinen neuen Verlauf der Übergangskurve ergibt. Diese Art der Spitze stellt einen Grenzfall dar, in dem die beiden zu einem Doppelpunkt gehörenden Lagen einer Ebene als Grenzfall zusammenfallen. Diese Konstellation ist also daran zu erkennen, daß die Parameter p_0 und p - und somit auch die Getriebeelagen - identisch sind bzw. - da die hierfür notwendige Lage von den Punkten A und B in der Regel nicht exakt eingenommen wird - sich der Verlauf der Parameter p_0 und p - aufgetragen über der Anzahl der Suchschritte - kreuzen. Wird die Suche nach Übergangskurvenpunkten nicht über eine ganze Periode des Mechanismus fortgesetzt, sondern an einer derartigen Stelle beendet, so muß die Suche zum vollständigen Ermitteln des Verlaufs eines Astes der Übergangskurve am Startpunkt ein zweites Mal begonnen werden. Hierbei ist die Variation des Parameters p_0 mit zur ersten Suche entgegengesetztem Vorzeichen aufzunehmen.

Zusätzlich sind folgende Maßnahmen zu ergreifen:

- Der Wechsel der Lage einer Ebene vom Anfang zum Ende einer Periode oder umgekehrt bereitet häufig programmtechnische Probleme. Um diese zu umgehen, sollten mindestens drei aufeinander folgende Perioden gemeinsam betrachtet werden. Beginnt

die Suche nach Übergangskurvenpunkten bei der mittleren der verwendeten Perioden, so bereitet ein Wechsel zur vorherigen oder nachfolgenden keine Schwierigkeiten¹⁰⁾.

- Steht eine der Verbindungsgeraden DP_{x0} bzw. DP'_{x0} (vgl. Bild 5.9, S. 129) zwischen Doppelpunkt D und Momentanpol P_{x0} bzw. P'_{x0} nahezu senkrecht auf der x -Achse, so wechselt der Winkel dieser Geraden von $+90^\circ$ auf -90° . Die dadurch auftretenden Probleme können in der Regel vermieden werden, wenn in diesen Fällen die x - und die y -Achse vertauscht werden. Als Ergebnis dieses Tauschs treten Winkel um 0° auf, wobei die Winkeldifferenz zwischen den Geraden DP_{x0} bzw. DP'_{x0} beibehalten wird. (Auf diese Weise können bei fast allen Getrieben Grenzfälle in den Gleichungen dieses und des folgenden Abschnitts umgangen werden. Ausgenommen hiervon sind die Grenzfälle, die durch einen gegen Unendlich strebenden Abstand der Doppelpunkte bzw. Momentanpole von den gestellfesten Drehgelenken verursacht werden.)

Wird keine (akzeptable) Lösung trotz zweier vorhandener Startwerte gefunden, so wird bis zu viermal versucht, durch Ändern der Ebenenlage anhand eines Erhöhens des Parameters p_0 um Δp_0 (s. o.) zwei neue sinnvolle Startlösungen für das Näherungsverfahren *Regula falsi* zu ermitteln. Versuchsweise sollte bei der Variation von p_0 der Wert von p konstant gehalten oder ebenfalls um Δp (s. o.) variiert werden.

5.2.4.3 Finden eines Astes der Übergangskurve mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens

Der in Abschnitt 5.2.4.2 entwickelte Algorithmus zum Auffinden eines Astes der Übergangskurve mit dem Näherungsverfahren *Regula falsi* benötigt zwei Startwerte, deren Funktionswerte entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen. Auf die Suche eines zweiten Startwertes kann verzichtet werden, wenn - wie bei den Getrieben zum Erzeugen von Trochoiden (Kapitel 4) - das NEWTONsche Näherungsverfahren mit der Gleichung

$$p_{i+1} = p_i - \frac{f(p_i)}{f'(p_i)} \quad [25] \quad (5.61)$$

¹⁰⁾ Damit die Felder in einem Programm nicht unnötig groß dimensioniert werden müssen, reicht es in der Regel, nur die Indizierung für den Zugriff auf die Feldelemente für mehrere Perioden vorzusehen, während das Feld selbst nur eine Periode enthält. Auf die Feldelemente muß dann indirekt zugegriffen werden, indem die Positionsnummer durch die Anzahl der Feldelemente für eine Periode geteilt und der bei dieser Teilung entstehende ganzzahlige Rest als Nummer für den Elementzugriff verwendet wird.

für einen verbesserten Wert verwendet wird¹¹⁾. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß die Ableitung $\dot{f}(p_i)$ und somit die Ableitung von Gleichung (5.59) bekannt sein muß. Diese Ableitung soll in diesem Abschnitt hergeleitet werden:

Nach [25] lautet für die Funktion

$$f(p) = \arctan[x(p)] \quad (5.62)$$

die Ableitung nach dem Parameter p

$$\dot{f}(p) = \frac{1}{1+x^2(p)} \cdot \dot{x}(p) \quad (5.63)$$

Wird diese Erkenntnis auf Gleichung (5.59) angewandt, so folgt für die Ableitung des Winkels φ_1 (vgl. Bild 5.9, S. 129) zwischen den Geraden DP_{x0} und DP'_{x0} , die den Doppelpunkt D und jeweils einen der beiden zugehörigen Momentanpole P_{x0} und P'_{x0} verbinden, mit Hilfe der Kettenregel

$$\dot{f}(p) = \frac{1}{1+m_{DP_{x0}}^2} \cdot \dot{m}_{DP_{x0}}^2 - \frac{1}{1+m_{DP'_{x0}}^2} \cdot \dot{m}_{DP'_{x0}}^2 \quad (5.64)$$

Benötigt werden in Gleichung (5.64) die Ableitungen der Steigungen $m_{DP_{x0}}$ und $m_{DP'_{x0}}$ der Verbindungsgeraden DP_{x0} und DP'_{x0} . Diese lassen sich durch Anwenden der Quotientenregel aus Gleichung (5.53) herleiten. Mit den Abkürzungen

$$u_{DP_{x0}} = y_D - y_{P_{x0}} \quad (5.65)$$

$$\dot{u}_{DP_{x0}} = \dot{y}_D - \dot{y}_{P_{x0}} \quad (5.66)$$

$$v_{DP_{x0}} = x_D - x_{P_{x0}} \quad \text{und} \quad (5.67)$$

$$\dot{v}_{DP_{x0}} = \dot{x}_D - \dot{x}_{P_{x0}} \quad (5.68)$$

folgt für die Ableitung der Steigung $m_{DP_{x0}}$

$$\dot{m}_{DP_{x0}} = \frac{\dot{u}_{DP_{x0}} \cdot v_{DP_{x0}} - u_{DP_{x0}} \cdot \dot{v}_{DP_{x0}}}{v_{DP_{x0}}^2} \quad (5.69)$$

Analog folgt für die Ableitung der Steigung $m_{DP'_{x0}}$

$$\dot{m}_{DP'_{x0}} = \frac{\dot{u}_{DP'_{x0}} \cdot v_{DP'_{x0}} - u_{DP'_{x0}} \cdot \dot{v}_{DP'_{x0}}}{v_{DP'_{x0}}^2} \quad (5.70)$$

¹¹⁾ Da alternative Lagen eines Punktes in dieser Arbeit mit einem Strich gekennzeichnet sind, werden im folgenden abgeleitete Größen immer mit einem Punkt gekennzeichnet. Für die Gleichungen ist es aber unerheblich, ob die Ableitungen nach der Zeit oder nach einem anderen Parameter gebildet werden.

Sind die Ableitungen der Koordinaten des Doppelpunktes D und der Momentanpole P_{x_0} sowie P'_{x_0} bekannt, so kann also die Ableitung des Winkels zwischen der Geraden DP_{x_0} und der Geraden DP'_{x_0} ermittelt werden.

Aus Gleichung (5.36) läßt sich mit Hilfe der Quotientenregel die Ableitung \dot{x}_D der Koordinate x_D des Doppelpunktes D (vgl. Bild 5.9, S. 129) bestimmen. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$u_D = b_{nAA'} - b_{nBB'} , \quad (5.71)$$

$$\dot{u}_D = \dot{b}_{nAA'} - \dot{b}_{nBB'} , \quad (5.72)$$

$$v_D = m_{nBB'} - m_{nAA'} \text{ und} \quad (5.73)$$

$$\dot{v}_D = \dot{m}_{nBB'} - \dot{m}_{nAA'} \quad (5.74)$$

lautet die Gleichung für die Ableitung der x-Koordinate des Doppelpunktes D

$$\dot{x}_D = \frac{\dot{u}_D \cdot v_D - u_D \cdot \dot{v}_D}{v_D^2} . \quad (5.75)$$

Für die Ableitung des Ordinatenschnittpunktes $b_{nAA'}$ der Mittelsenkrechten $n_{AA'}$ folgt aus Gleichung (5.33)

$$\dot{b}_{nAA'} = \dot{y}_{MAA'} - \dot{m}_{nAA'} \cdot x_{MAA'} - m_{nAA'} \cdot \dot{x}_{MAA'} . \quad (5.76)$$

Aus den Gleichungen (5.29) und (5.30) für die Koordinaten der Mittelsenkrechten $M_{AA'}$ lassen sich die Ableitungen

$$\dot{x}_{MAA'} = \dot{x}_A + \frac{1}{2}(\dot{x}_{A'} - \dot{x}_A) \text{ und} \quad (5.77)$$

$$\dot{y}_{MAA'} = \dot{y}_A + \frac{1}{2}(\dot{y}_{A'} - \dot{y}_A) \quad (5.78)$$

ermitteln. Da für das Suchen eines Übergangskurvenpunktes die Ebene mit den Punktlagen A und B festgehalten wird, folgt für die Ableitungen der Koordinaten der Punkte A und B

$$\dot{x}_A = 0 \quad (5.79)$$

$$\dot{y}_A = 0 \quad (5.80)$$

$$\dot{x}_B = 0 \quad (5.81)$$

$$\dot{y}_B = 0 . \quad (5.82)$$

Die Gleichungen (5.77) und (5.78) lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (5.79) und (5.80) vereinfachen zu

$$\dot{x}_{MAA'} = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_{A'} \text{ und} \quad (5.83)$$

$$\dot{y}_{MAA'} = \frac{1}{2} \cdot \dot{y}_{A'} . \quad (5.84)$$

Analog zu den Gleichungen (5.83) und (5.84) gilt für die Ableitungen der Koordinaten $x_{M_{BB}'}$ und $y_{M_{BB}'}$

$$\dot{x}_{M_{BB}'} = \frac{1}{2} \cdot \dot{x}_{B'} \quad \text{und} \quad (5.85)$$

$$\dot{y}_{M_{BB}'} = \frac{1}{2} \cdot \dot{y}_{B'} . \quad (5.86)$$

Mit den Abkürzungen

$$u_{n_{AA}'} = x_{A'} - x_A , \quad (5.87)$$

$$\dot{u}_{n_{AA}'} = \dot{x}_{A'} , \quad (5.88)$$

$$v_{n_{AA}'} = y_A - y_{A'} \quad \text{und} \quad (5.89)$$

$$\dot{v}_{n_{AA}'} = \dot{y}_A , \quad (5.90)$$

in denen die Gleichungen (5.79) und (5.80) schon berücksichtigt wurden, folgt mit Hilfe der Quotientenregel für die Ableitung der Steigung $m_{n_{AA}'}$ der Normalen n_{AA}' aus Gleichung (5.32)

$$\dot{m}_{n_{AA}'} = - \frac{\dot{u}_{n_{AA}'} \cdot v_{n_{AA}'} - u_{n_{AA}'} \cdot \dot{v}_{n_{AA}'}}{v_{n_{AA}'}^2} . \quad (5.91)$$

Analog hierzu lässt sich die Ableitung der Steigung $m_{n_{BB}'}$ der Normalen n_{BB}' ermitteln anhand der Gleichung

$$\dot{m}_{n_{BB}'} = - \frac{\dot{u}_{n_{BB}'} \cdot v_{n_{BB}'} - u_{n_{BB}'} \cdot \dot{v}_{n_{BB}'}}{v_{n_{BB}'}^2} . \quad (5.92)$$

Für die Ableitung der y-Koordinate des Doppelpunktes D folgt aus Gleichung (5.37)

$$\dot{y}_D = \dot{m}_{n_{AA}'} \cdot x_D + m_{n_{AA}'} \cdot \dot{x}_D + \dot{b}_{n_{AA}'} . \quad (5.93)$$

Somit sind die Ableitungen der Koordinaten des Doppelpunktes D bekannt.

Da für das Ermitteln eines Übergangskurvenpunktes die Ebene mit den Punktlagen A und B festgehalten wird, gilt für die Ableitungen der Koordinaten $x_{P_{x0}}, y_{P_{x0}}$ des Momentanpols P_{x0}

$$\dot{x}_{P_{x0}} = 0 \quad \text{und} \quad (5.94)$$

$$\dot{y}_{P_{x0}} = 0 . \quad (5.95)$$

Als letztes müssen nun die Ableitungen der Koordinaten $x_{P'_{x0}}, y_{P'_{x0}}$ des Momentanpols P'_{x0} hergeleitet werden. Mit den Abkürzungen

$$u_{P_{x0}'} = b_{n_{vA}'} - b_{n_{vB}'} , \quad (5.96)$$

$$\dot{u}_{P_{x0}'} = \dot{b}_{n_{vA}'} - \dot{b}_{n_{vB}'} , \quad (5.97)$$

$$v_{P_{x0}'} = m_{n_{vB}'} - m_{n_{vA}'} \quad \text{und} \quad (5.98)$$

$$\dot{v}_{Px0'} = \dot{m}_{nvB'} - \dot{m}_{nvA'} \quad (5.99)$$

folgt aus Gleichung (5.46) unter Zuhilfenahme der Kettenregel

$$\dot{x}_{Px0'} = \frac{\dot{u}_{P'x0'} \cdot v_{P'x0'} - u_{P'x0'} \cdot \dot{v}_{P'x0'}}{v_{P'x0'}^2} \quad (5.100)$$

Für die Ableitung des Ordinatenschnittpunktes $b_{nvA'}$ der Normalen $n_{vA'}$ auf den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{A'}$ des Punktes A' (vgl. Bild 5.23, S. 155) folgt aus Gleichung (5.45) mit Hilfe der Produktregel

$$\dot{b}_{nvA'} = \dot{y}_{A'} - \dot{m}_{nvA'} \cdot x_{A'} - m_{nvA'} \cdot \dot{x}_{A'} \quad (5.101)$$

Analog hierzu gilt für die Ableitung des Ordinatenschnittpunktes $b_{nvB'}$:

$$\dot{b}_{nvB'} = \dot{y}_{B'} - \dot{m}_{nvB'} \cdot x_{B'} - m_{nvB'} \cdot \dot{x}_{B'} \quad (5.102)$$

Für die Ableitung der Steigung $m_{nvA'}$ der Normalen $n_{vA'}$ auf den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{A'}$ des Punktes A' (vgl. Bild 5.23, S. 155) folgt aus Gleichung (5.44) mit Hilfe der Quotientenregel

$$\dot{m}_{nvA'} = -\frac{\ddot{x}_{A'} \cdot \dot{y}_{A'} - \dot{x}_{A'} \cdot \ddot{y}_{A'}}{\dot{y}_{A'}^2} \quad (5.103)$$

Analog hierzu gilt für die Ableitung der Steigung $m_{nvB'}$:

$$\dot{m}_{nvB'} = -\frac{\ddot{x}_{B'} \cdot \dot{y}_{B'} - \dot{x}_{B'} \cdot \ddot{y}_{B'}}{\dot{y}_{B'}^2} \quad (5.104)$$

Die Ableitung der y-Koordinate $y_{Px0'}$ des Momentanpols $P_{x0'}$ kann aus Gleichung (5.47) mit Hilfe der Produktregel ermittelt werden:

$$\dot{y}_{Px0'} = \dot{m}_{nvA'} \cdot x_{Px0'} + m_{nvA'} \cdot \dot{x}_{Px0'} + \dot{b}_{nvA'} \quad (5.105)$$

Somit stehen alle Gleichungen zum Ermitteln eines Übergangskurvenpunktes $K_{\ddot{u}} = D[f(p)=0]$ mit Hilfe des NEWTONschen Näherungsverfahrens zur Verfügung.

Wird der soeben entwickelte Algorithmus anstelle der *Suche von zwei Startwerten* und dem *Ermitteln eines Näherungswertes mit Hilfe des Näherungsverfahrens Regula falsi* in dem in Abschnitt 5.2.4.2 vorgeschlagenen Postprozessor zum Ermitteln eines Astes der Übergangskurve verwendet, so gibt es zwei Alternativen für das Ermitteln der Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Koordinaten $x_{A'}, y_{A'}$ sowie $x_{B'}, y_{B'}$ der Punkte A' und B' :

- Getriebetechnische Analyseprogramme ermitteln in der Regel die ersten beiden Ableitungen von Punktbahnen nach der Zeit oder nach einem Antriebsparameter. Werden diese Ableitungen verwendet, so müssen auch die Zeit oder der verwendete Antriebsparameter als Parameter p für das Ermitteln des Astes der Übergangskurve verwendet werden. Um für beliebige (Zwischen-)Werte des Parameters p die benötigten Funktionswerte von einem Postprozessor ermitteln zu lassen, müssen geeignete Approximationsverfahren eingesetzt werden. Als gut geeignet haben sich interpolierende periodi-

sche kubische Splines [37] erwiesen, die für alle 12 Funktionen $x_A(p)$, $y_A(p)$, $\dot{x}_A(p)$, $\dot{y}_A(p)$, $\ddot{x}_A(p)$, $\ddot{y}_A(p)$, $x_B(p)$, $y_B(p)$, $\dot{x}_B(p)$, $\dot{y}_B(p)$, $\ddot{x}_B(p)$ und $\ddot{y}_B(p)$ zu bilden sind.

- Wird ein interpolierender kubischer periodischer Spline durch diskrete Werte der x-Koordinaten einer Punktbahn und ein weiterer durch diskrete Werte der entsprechenden y-Koordinaten der gleichen Punktbahn gelegt, so lassen sich sehr leicht die ersten und die zweiten Ableitungen der beiden Koordinaten bilden. Hierzu muß nur die kubische Hyperbel zwischen zwei vorgegebenen benachbarten Koordinaten entsprechend oft abgeleitet werden. Sind genügend Koordinatenwerte vorgegeben - im allgemeinen reichen bei einmal umlaufenden Antrieben 360 - so sind bei Gelenk- und bei Rädergetrieben sowie bei Kombinationen beider Getriebearten diese Ableitungen genügend genau, um sie für die Suche eines Astes der Übergangskurve zu verwenden. Neben den Vorteil, daß nur vier Splines [der Funktionen $x_A(p)$, $y_A(p)$, $x_B(p)$ und $y_B(p)$] verwaltet werden müssen, tritt ein weiterer. Der Parameter, nach dem abgeleitet wird, ist unabhängig vom Analyseprogramm frei wählbar. Wird z. B. die Bahnlänge der Punktbahn des Punktes A als Parameter verwendet - die näherungsweise aus der Summe des Abstandes benachbarter Punkte der Punktfolge ermittelt werden kann - so geht die Übersetzung zwischen Antrieb und Punktbahn nicht in die Ableitungen mit ein. Die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Ableitungen fällt (bei geschickter Punktwahl) relativ gering aus, so daß eine Änderung des Parameters p um Δp in günstigen Fällen zu einer gleichbleibenden Änderung der Koordinaten des Doppelpunktes führt, was das Auffinden eines Übergangskurvenpunktes erleichtert.

Das hier gesagte gilt natürlich auch für den Einsatz des Näherungsverfahrens *Regula falsi* (siehe Abschnitt 5.2.4.2), das die erste Ableitung benötigt.

Ein Vergleich zwischen dem Verwenden des Näherungsverfahrens *Regula falsi* und dem Verwenden des NEWTONschen Näherungsverfahrens fällt zugunsten des zweiten aus. Obwohl für das NEWTONsche Näherungsverfahren zusätzliche Gleichungen für die zweite Ableitung benötigt werden, ist es schneller und genauer. So werden häufig schon nach zehn Iterationen die Winkeldifferenzen nach Gleichung (5.59) kleiner als 10^{-12} Grad, während bei dem Näherungsverfahren *Regula falsi* oft ca. 1000 Iterationen benötigt werden, um Winkeldifferenzen kleiner als 10^{-2} Grad zu erhalten.

Werden allerdings für das NEWTONsche Näherungsverfahren nicht die Ableitung der kubischen Splines nach der zurückgelegten Bahn des Punktes A verwendet, sondern die Ableitungen eines Analyseprogramms nach der Zeit oder nach einem anderen Antriebsparameter, so wurden bei einem getesteten Beispiel viermal so viele Iterationen für die gleiche Genauigkeit benötigt.

In der Nähe des Berührungspunktes von Übergangskurve und Gangpolkurve fallen für eine Genauigkeit von 10^{-12} Grad allerdings auch bei dem NEWTONschen Näherungsverfahren bis zu 10.000 Iterationen an. Deshalb sollte eine derart hohe Genauigkeit im allgemeinen nicht gefordert werden.

5.3 Berührungspunkte der Bahnen von Punkten, die zu verschiedenen Ebenen gehören

Sind die Bewegungen zweier allgemein bewegter Ebenen E_1 und E_2 miteinander gekoppelt (z. B. durch einen Mechanismus mit der gleichen Anzahl an Antrieben wie an Bewegungsfreiheiten - vgl. die Ebenen der Glieder 2 und 3 in Bild 1.1, S. 3) , so existieren Berührungspunkte zwischen den Projektionen der Bahnen von bestimmten Punkten dieser beiden Ebenen auf die gestellfeste Ebene (vgl. auch Bild 3.1a, S. 42). Da in den Berührungspunkten der Projektionen beide Bahnen die gleiche Tangente aufweisen, sind solche Berührungspunkte technisch von Interesse - z. B. für die Übergabe von Gegenständen.

Durch das Vorgeben der Lage von Ebene E_1 ist für den geschilderten Fall auch die Lage der Ebene E_2 bestimmt. Alle Berührungspunkte vorstehend beschriebener Art zwischen Bahnen von Punkten beider Ebenen liegen in einer geforderten Getriebestellung auf der Verbindungslinie des Momentanpols der Ebene E_1 mit dem Momentanpol der Ebene E_2 , da die Tangente aller Punkte auf dieser Verbindungsgeraden senkrecht auf der Verbindungsgeraden stehen - ob die Punkte nun zur Ebene E_1 oder zur Ebene E_2 gehören.

6 Das Einteilen der bewegten Ebene in Felder

Liegen die Gangpolkurve und alle Äste der Übergangskurve einer allgemein bewegten Ebene vor, so kann die Ebene in Felder eingeteilt werden, deren Punkte Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten aufweisen (Bild 1.1, S. 3). Ein Mensch kann diese Feldeinteilung sehr leicht vornehmen, wenn die Gangpolkurve und die Übergangskurve optisch dargestellt werden und alle Felder eine optisch gut wahrnehmbare Ausdehnung aufweisen.

Sehr kleine oder schmale Felder, deren geringste Breite etwa einer Linienstärke entsprechen, werden allerdings oft übersehen. Deshalb - und auch für eine rechnerinterne Weiterverarbeitung - ist ein Algorithmus zum Erkennen der Felder notwendig.

Liegen die Gangpolkurve und alle Äste der Übergangskurve als Punktefolgen vor, so geschieht die Einteilung in Felder anhand folgender Schritte, die in den nachfolgenden Abschnitten näher erläutert werden:

1. Suche aller Quasi-Asymptoten, Schnittpunkte und Berührungspunkte der verwendeten Kurven.
2. Einteilen aller Kurven in Kurvenabschnitte, die durch Endpunkte von Quasi-Asymptoten, Schnittpunkte oder Berührungspunkte gebildet werden (Bild 6.1).
3. Verschieben der Endpunkte von Quasi-Asymptoten, falls dadurch weitere Schnittpunkte zu erwarten sind (Bild 6.2, S. 177) und ggf. wiederholen der Schritte 1 bis 3.
4. Ermitteln der Begrenzung der außenliegenden und der innenliegenden Felder (Bild 6.1).
5. Ermitteln der Anzahl der Schnittpunkte der Bahnen von Punkten der gefundenen Felder.

6.1 Suche von Quasi-Asymptoten, Schnittpunkten und Berührungspunkten

Das Ermitteln von Quasi-Asymptoten und von Schnittpunkten zwischen zwei verschiedenen durch Punktefolgen gegebenen Kurven ist in Abschnitt 5.1.2.3 beschrieben. Zu den Schnittpunkten zählen auch die Selbstschnittpunkte. Weisen drei oder mehr Selbstschnittpunkte (aufgrund numerischer Ungenauigkeiten bei ihrer Ermittlung) einen so geringen Abstand auf, daß sie als identisch anzusehen sind, werden sie zu einem Mehrfach-

Selbstschnittpunkt vereinigt, dessen Koordinaten das arithmetische Mittel der x- bzw. y-Koordinaten aller beteiligten Selbtschnittpunkte aufweisen.

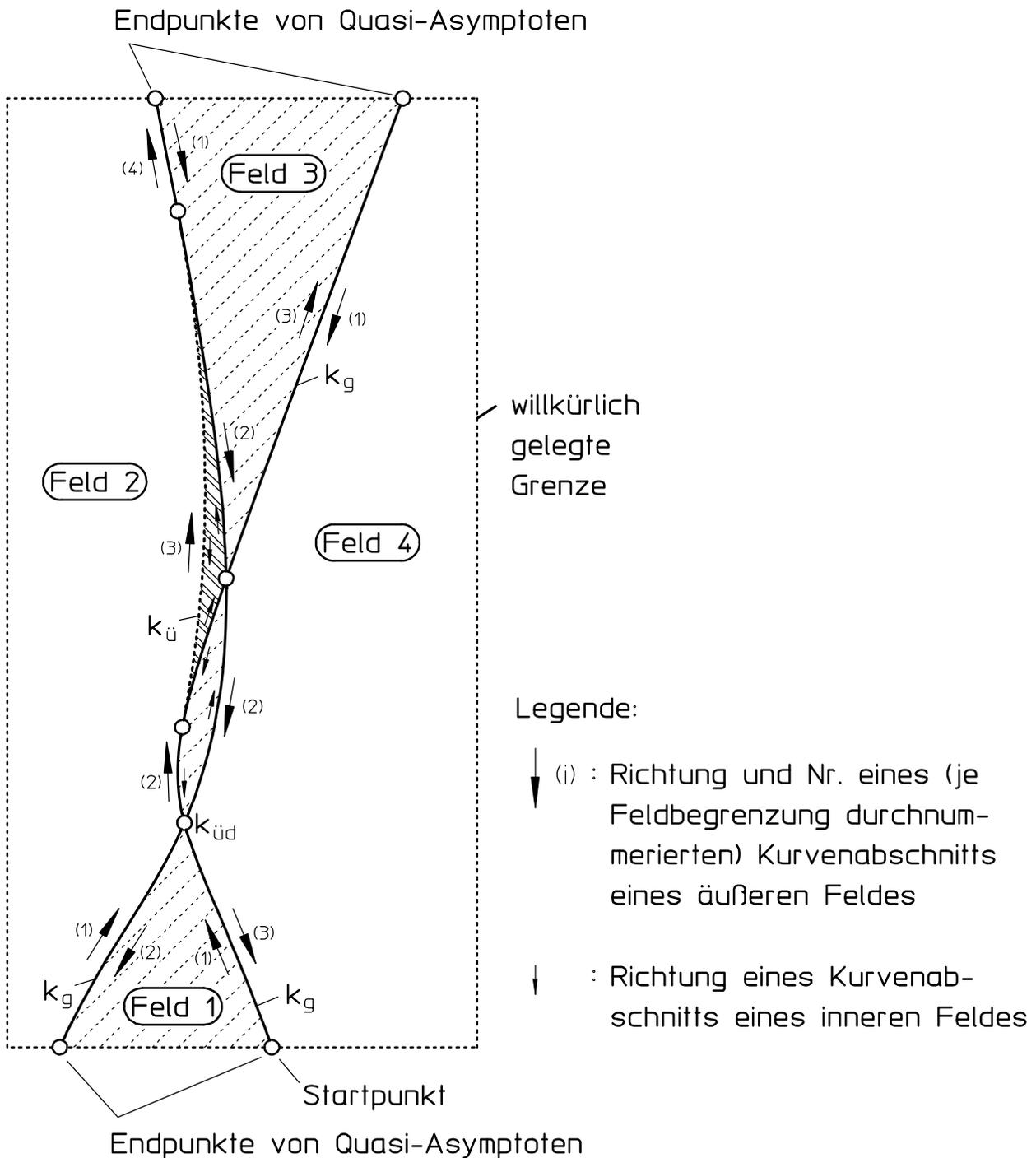
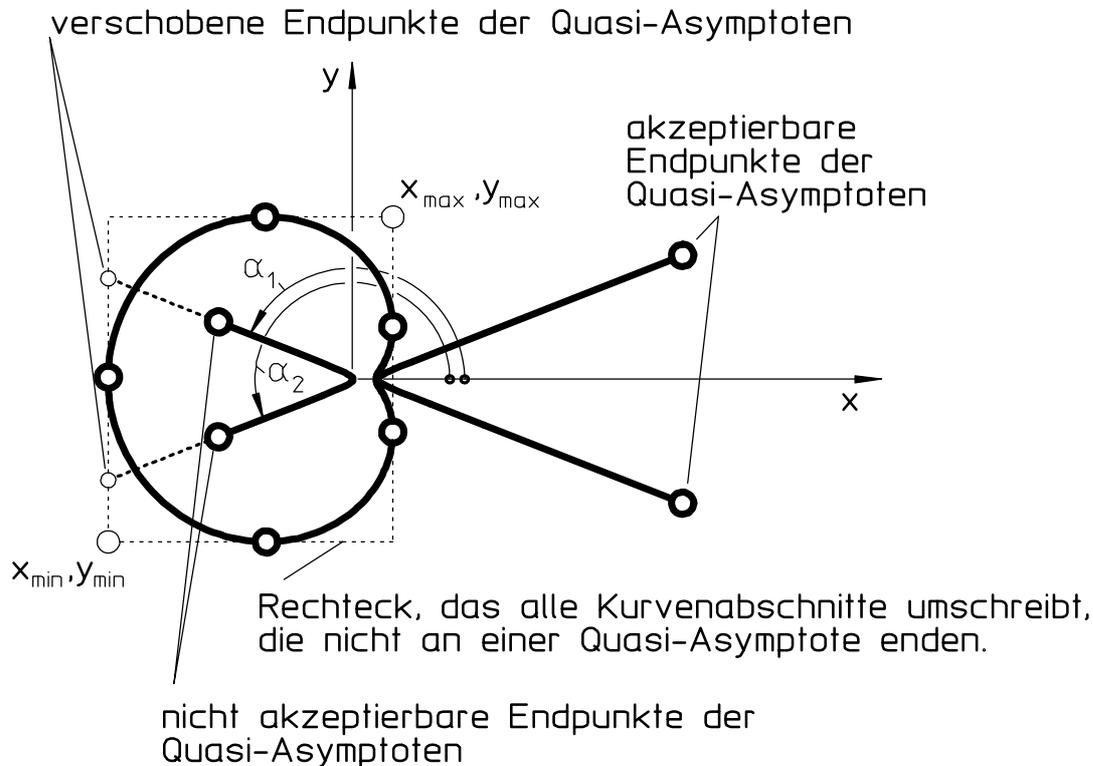


Bild 6.1: Ermitteln der durch die Gangpolkurve k_g und die Übergangskurve k_u gebildeten Felder einer Kurbelschwinge

Der Algorithmus zum Auffinden von Schnittpunkten zwischen verschiedenen Kurven ist auch auf das Ermitteln von Selbtschnittpunkten anwendbar. Hierbei wird nach dem Su-

chen von Kurvenabschnitten mit monoton steigenden oder fallenden x-Koordinaten das Verfahren zum Finden von Schnittpunkten zwischen verschiedenen Kurvenabschnitten auf die gefundenen Abschnitte dieser einen Kurve angewandt.



Legende:

○ : Punkt eines Kurvenabschnitts mit maximaler oder minimaler x- oder y-Koordinate

Bild 6.2: Verlängern von Quasi-Asymptoten für die Suche nach allen Selbstberührungspunkten einer Kurve
(Hier: Gangpolkurve eines durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetriebes)

Das Auffinden von Berührungspunkten zwischen Übergangskurve und Gangpolkurve gestaltet sich in den Fällen einfach, in denen die Übergangskurve zwischen zwei Endpunkten in beiden Richtungen durchlaufen wird und diese Endpunkte die Berührungspunkte bilden (vgl. Bild 3.9, S. 51). Da der Algorithmus zum Auffinden der Übergangskurvenäste jeden Ast nur für einen Durchlaufsinne ermittelt (siehe Abschnitt 5.2.4.2), braucht nur kontrolliert zu werden, ob die Endpunkte auf der Gangpolkurve liegen. Hierzu ist der minimale Abstand des Endpunktes der Übergangskurve von der Gangpolkurve zu ermitteln (siehe Abschnitt 6.1.1). Unterschreitet dieser eine vorgegebene Schranke, wird der Endpunkt als Berührungspunkt eingestuft. Stellt sich heraus, daß ein Schnittpunkt und ein Berührungspunkt von Gangpol- und Übergangskurve einen so geringen Abstand haben, daß sie als identisch angesehen werden müssen, so ist davon auszugehen, daß aufgrund numerischer

Ungenauigkeiten im Berechnungsverfahren der Endpunkt der Übergangskurve „auf der falschen Seite“ der Gangpolkurve zu liegen gekommen ist. Der Endpunkt ist in diesem Fall in den Schnittpunkt zu verschieben.

Das Auffinden von allgemeinen Berührungspunkten zwischen der Gangpolkurve und der Übergangskurve wird in Abschnitt 6.1.2 beschrieben.

6.1.1 Ermitteln des minimalen Abstands eines Punktes von einer Kurve

Ist eine Kurve als Punktfolge der Punkte P_i gegeben, so werden zum Ermitteln des Abstandes eines Punktes Q (Bild 6.3) von der Kurve jeweils zwei benachbarte Punkte P_i und P_{i+1} durch eine Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ verbunden. Um den Abstand a_s des Punktes Q von der Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ zu bestimmen, werden zunächst die Winkel

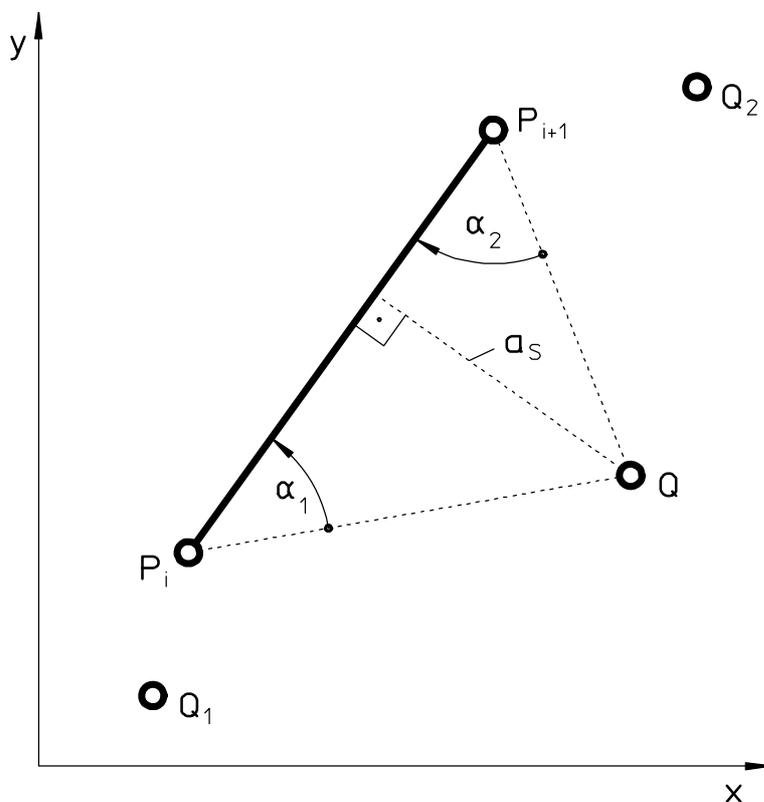


Bild 6.3: Ermitteln des Abstandes zwischen einer Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ und einem Punkt Q

$$\sphericalangle QP_iP_{i+1} = \alpha_1 = \arctan\left(\frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}\right) - \arctan\left(\frac{y_Q - y_{P_i}}{x_Q - x_{P_i}}\right) \quad \text{und} \quad (6.1)$$

$$\sphericalangle QP_{i+1}P_i = \alpha_2 = \arctan\left(\frac{y_{P_i} - y_{P_{i+1}}}{x_{P_i} - x_{P_{i+1}}}\right) - \arctan\left(\frac{y_Q - y_{P_{i+1}}}{x_Q - x_{P_{i+1}}}\right) \quad (6.2)$$

ermittelt [38]. Da die Differenz zweier Winkel gleich der negativen Differenz der Ergänzungswinkel beider Winkel ist, folgt aus Gleichung (6.2):

$$\sphericalangle QP_{i+1}P_i = \alpha_2 = -\left[\arctan\left(\frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}\right) - \arctan\left(\frac{y_{P_{i+1}} - y_Q}{x_{P_{i+1}} - x_Q}\right)\right]. \quad (6.3)$$

Für die Gleichungen (6.1) bis (6.3) muß die Winkelfunktion $\arctan(\)$ in einem Intervall von 360° ermittelt werden. In FORTRAN geschieht das z. B. durch die Funktion ATAN2.

Werden die Ergebnisse der Gleichungen (6.1) und (6.3) (durch Addition von ggf. 360° bzw. durch Subtraktion von ggf. 360°) in den Wertebereich von -180° bis $+180^\circ$ gelegt, so müssen zum Ermitteln des Abstands a_S des Punktes Q von der Strecke $\overline{P_iP_{i+1}}$ drei Fälle unterschieden werden:

Liegen die Winkel α_1 und α_2 im Intervall $[-90^\circ, +90^\circ]$, so ist der Abstand

$$a_S = \sin(\alpha_1) \cdot \sqrt{(x_Q - x_{P_i})^2 + (y_Q - y_{P_i})^2} \quad (6.4)$$

mit der Länge des Lots der Strecke $\overline{P_iP_{i+1}}$ auf den Punkt Q identisch. Liegt der Winkel α_1 außerhalb des Intervalls (vgl. Punkt Q_1 in Bild 6.3), so muß der Abstand

$$a_S = \sqrt{(x_Q - x_{P_i})^2 + (y_Q - y_{P_i})^2} \quad (6.5)$$

zwischen den Punkten Q und P_i als Abstand zwischen Punkt und Strecke herangezogen werden. Liegt hingegen der Winkel α_2 außerhalb des Intervalls (vgl. Punkt Q_2 in Bild 6.3, S. 178), wird der Abstand

$$a_S = \sqrt{(x_Q - x_{P_{i+1}})^2 + (y_Q - y_{P_{i+1}})^2} \quad (6.6)$$

zwischen den Punkten Q und P_{i+1} verwendet.

Der minimale Abstand zwischen dem Punkt Q und der Punktefolge mit den Punkten P_i ist der kleinste Betrag des Abstands a_S aller Strecken $\overline{P_iP_{i+1}}$. Der Abstand zu Quasi-Asymptoten ist hierbei nicht zu berücksichtigen.

6.1.2 Ermitteln eines Berührungspunktes zwischen zwei Kurven

Kurven

Für das Ermitteln von Berührungspunkten zwischen zwei Kurven ist der Algorithmus zum *Ermitteln von Schnittpunkten zwischen zwei durch Punktesfolgen gegebene Kurven* (Abschnitt 5.1.2.3) zu ergänzen.

Bei der Suche von Schnittpunkten bilden benachbarte Punkte einer Punktesfolge die Eckpunkte von zur x-Achse ausgerichteten Rechtecken (Bild 5.7, S. 122). Es können nur Schnittpunkte zwischen den Verbindungslinien benachbarter Punkte zweier Kurven auftreten, wenn die durch die benachbarten Punkte erzeugten Rechtecke einander überlappen.

Sollen neben Schnittpunkten auch Berührungspunkte gesucht werden, müssen die Begrenzungslinien der Rechtecke um den Abstand ΔR unter Beibehalten der Mittelpunkte der Rechtecke verschoben werden (Bild 6.4). Überlappen sich derart vergrößerte Rechtecke (Bild 6.5), so kann ein Berührungspunkt vorliegen, wenn der Berührungspunkt als ein minimaler Abstand zwischen zwei Kurven definiert wird, der eine vorgegebene Schranke unterschreitet.

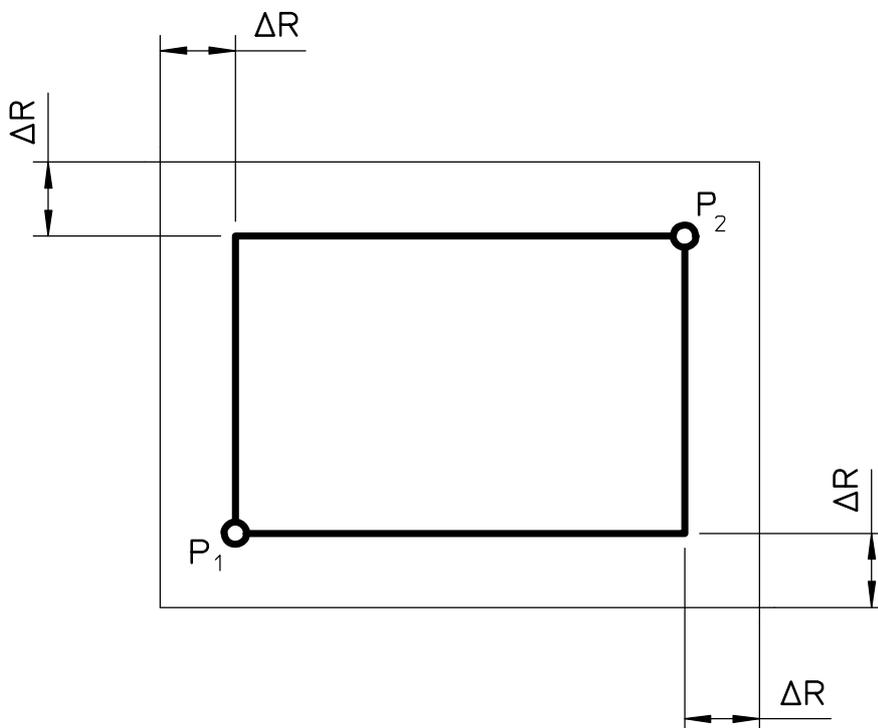


Bild 6.4: Vergrößern des durch die Punkte P_1 und P_2 aufgespannten Suchbereichs für das Ermitteln von Berührungspunkten um ΔR

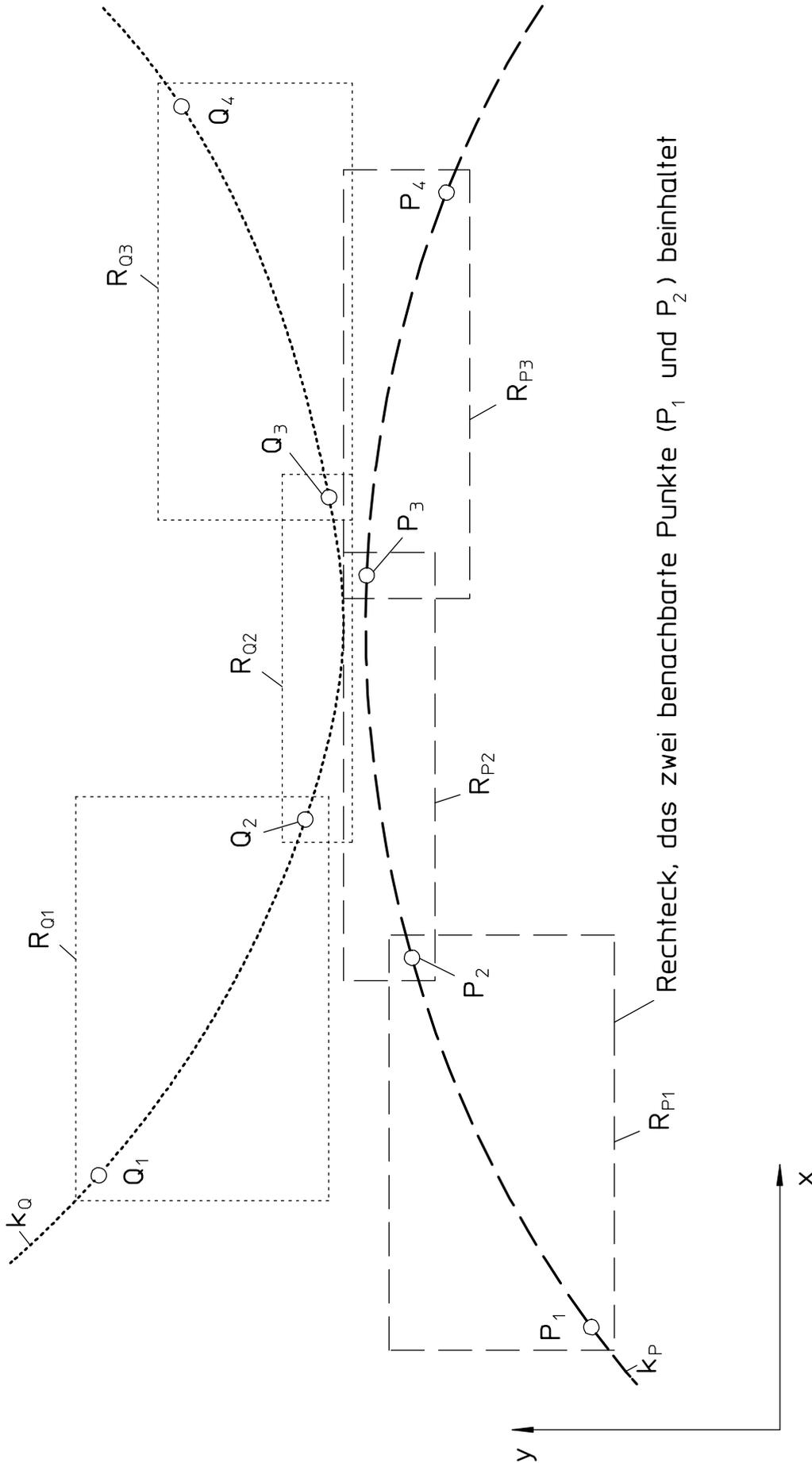


Bild 6.5: Suche nach Berührungspunkten von zwei durch Punktfolgen gegebenen Kurven k_P und k_Q

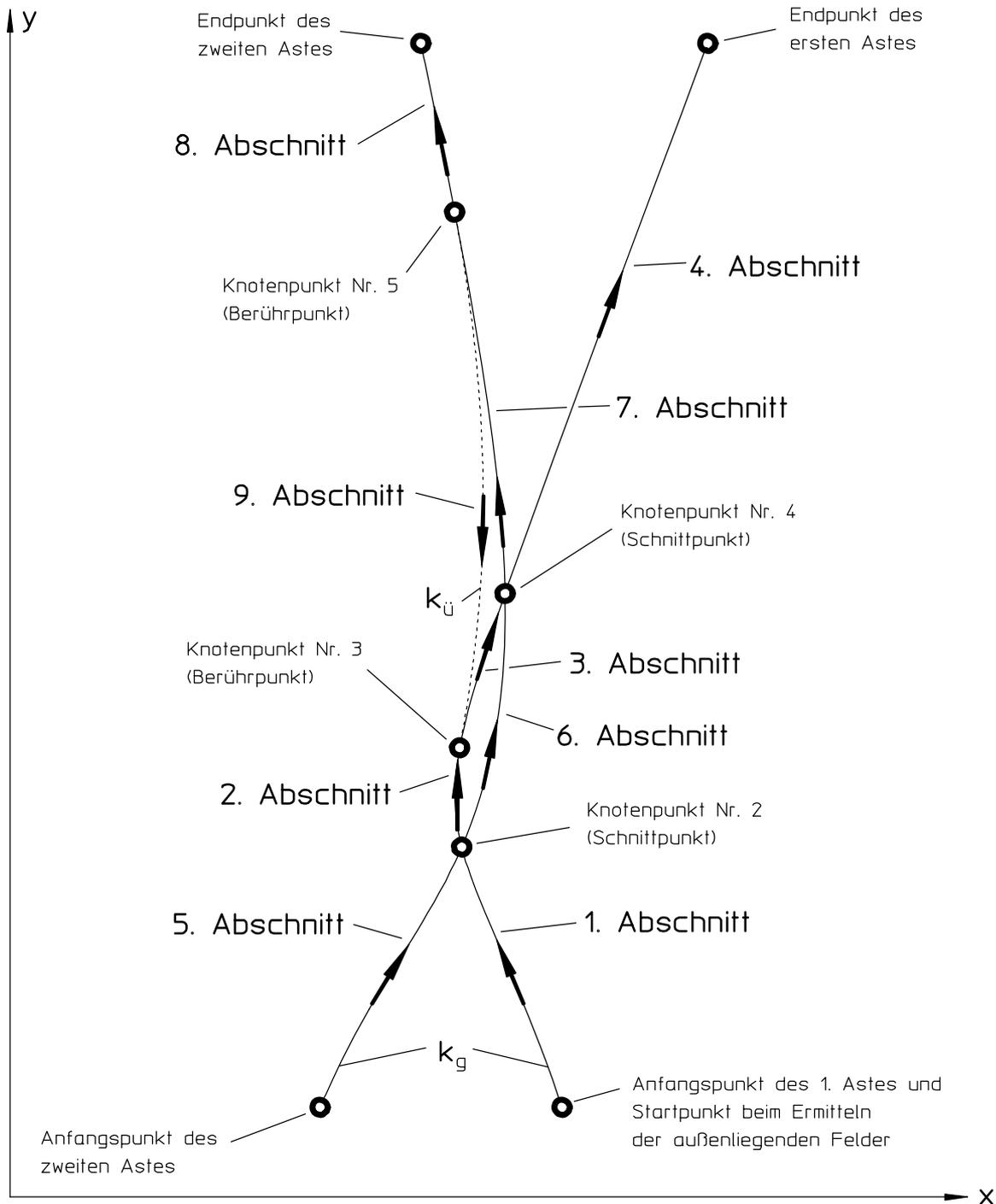
In Bild 6.5 überlappen zum Beispiel die Rechtecke R_{P_2} und R_{Q_2} , R_{P_3} und R_{Q_2} sowie R_{P_3} und R_{Q_3} einander. Die Suche nach Schnittpunkten und Selbstberührungspunkten beginnt immer bei den minimalen x-Koordinaten von Punkten der betrachteten Kurvenabschnitte. Die Rechtecke R_{P_2} und R_{Q_2} sind demnach diejenigen, deren Überlappung als erstes festgestellt wird.

Liegt kein Schnittpunkt der Strecken $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{Q_2Q_3}$ vor, sind die Abstände a_S zwischen den Punkten P_2 sowie P_3 und der Strecke $\overline{Q_2Q_3}$ mit Hilfe des in Abschnitt 6.1.1 beschriebenen Algorithmus zu ermitteln. Desgleichen sind die Abstände der Punkte Q_2 und Q_3 von der Strecke $\overline{P_2P_3}$ zu berechnen. Der minimale Abstand wird festgehalten und die Schnittpunktsuche wird mit den Rechtecken R_{P_3} und R_{Q_2} fortgesetzt. Weil wiederum kein Schnittpunkt zwischen den Strecken $\overline{P_3P_4}$ und $\overline{Q_2Q_3}$ existiert, muß das Minimum der Abstände a_S zwischen dem Punkt P_4 und der Strecke $\overline{Q_2Q_3}$ sowie zwischen dem Punkt Q_3 und der Strecke $\overline{P_3P_4}$ berechnet werden. Da der neu ermittelte minimale Abstand größer als der vorher festgestellte Abstand (des Punktes P_3 von der Strecke $\overline{Q_2Q_3}$) ist, steht fest, daß sich der Abstand beider Kurven wieder vergrößert. Ist der minimale Abstand kleiner als die vorgegebene Schranke und wird kein Schnittpunkt in einem Band festgestellt, in dem sich überlappende Rechtecke aneinanderreihen, liegt ein Berührungspunkt vor.

Werden in einem Band aneinandergereihter einander überlappender Rechtecke formal (mehrere) Schnittpunkte und (mehrere) Berührungspunkte ermittelt, handelt es sich um **einen** schleifenden Schnitt, es sei denn, zwei Schnittpunkte und alle Punkte zwischen diesen weisen einen so geringen Abstand auf, daß sie als identisch anzusehen sind. Im letztgenannten Fall handelt es sich um einen Berührungspunkt. Existieren zwar formal mehrere Berührungspunkte, aber kein Schnittpunkt, handelt es sich um **einen** Berührungspunkt. Alle zu einem Schnittpunkt erklärten Schnittpunkte sind im arithmetischen Mittel der x- und der y-Koordinaten der Schnittpunkte zu einem Punkt zu vereinen. Analog ist mit den Berührungspunkten zu verfahren.

6.2 Einteilen der Kurven in Kurvenabschnitte

Sind alle Quasi-Asymptoten, Schnittpunkte und Selbstberührungspunkte von Gang- und Übergangskurve bekannt, so werden beide Kurven in Kurvenabschnitte eingeteilt (Bild 6.6). Hierzu werden Punktesfolgen gebildet, deren erster und letzter Punkt ein Endpunkt einer Quasi-Asymptote, ein Schnittpunkt (dazu zählen auch Selbstschnittpunkte) oder ein Berührungspunkt ist und die keine weiteren der genannten Punkte aufweisen. Jeder Schnittpunkt und jeder Berührungspunkt gehört somit zu mehreren Kurvenabschnitten. Verbindungslinien der Endpunkte der Quasi-Asymptoten werden nicht berücksichtigt.



Legende:

- Anfangs- bzw. Endstützstellen der Abschnitte
- ↑ Richtung vom Anfang zum Ende der Abschnitte

Bild 6.6: Einteilen von Gangpolkurve k_G und Übergangskurve $k_{\ddot{U}}$ einer Kurbelschwinge in Abschnitte

Weist eine geschlossene Kurve keine Schnittpunkte und Berührungspunkte auf, bildet sie einen eigenen Kurvenabschnitt. Ob ein Kurvenabschnitt zur Gangpolkurve oder zur Übergangskurve gehört, spielt im folgenden keine Rolle mehr.

6.3 Verschieben des Endpunktes von Quasi-Asymptoten

Es gibt Fälle, in denen der Endpunkt einer Quasi-Asymptote innerhalb eines Kurvenzuges einer (anderen) Kurve liegt. Bild 6.2 (S. 177) zeigt als Beispiel hierfür die Gangpolkurve eines durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetriebes mit vier Drehgelenken und den Abmessungen des zweifach umlaufenden Antriebsgliedes $l_1 = 10$ cm, der Koppel $l_2 = 13$ cm, des Abtriebsgliedes $l_3 = 12$ cm und des Gestells $l_4 = 11$ cm. Es wurden 360 Punkte der Gangpolkurve berechnet. Trotzdem liegen zwei Endpunkte der (nicht eingezeichneten) Quasi-Asymptoten so nah am Nullpunkt des Koordinatensystems, daß erst nach dem Verschieben der nicht akzeptablen Endpunkte der Quasi-Asymptoten zwei weitere Selbstschnittpunkte der Gangpolkurve ermittelt werden können. Um derartige Konstellationen zu erfassen, werden alle Kurvenabschnitte entfernt, die Endpunkte von Quasi-Asymptoten aufweisen, und ein Rechteck um die verbliebenen Kurvenabschnitte gelegt.

Weist ein Endpunkt einer Quasi-Asymptoten Koordinaten auf, die zwischen der minimalen und der maximalen x- sowie zwischen der minimalen und der maximalen y-Koordinate der Punkte der verbliebenen Kurvenabschnitte und damit innerhalb des erwähnten Rechtecks liegen (Bild 6.2, S. 177), so muß er verschoben werden. Die Verbindungslinie der benachbarten Punkte der Punktfolge vor der Quasi-Asymptoten wird hierzu bei gleichbleibendem Winkel (der Verbindungslinie zur x-Achse) so verlängert, daß

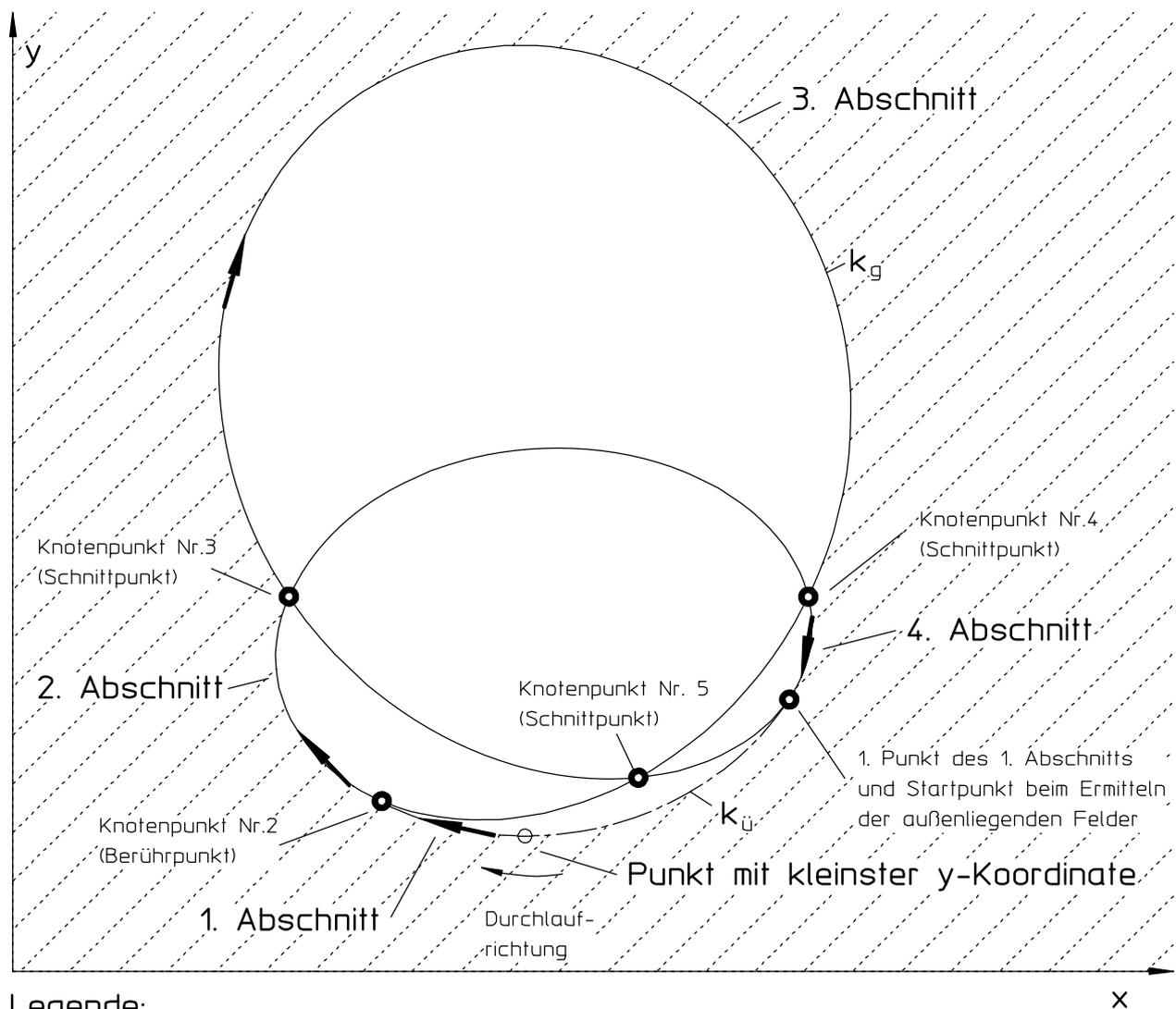
- für Winkel zwischen -45° und $+45^\circ$ die x-Koordinate des Endpunktes den maximalen Wert aller vorkommenden x-Koordinaten,
- für Winkel zwischen $+45^\circ$ und 135° die y-Koordinate des Endpunktes den maximalen Wert aller vorkommenden y-Koordinaten,
- für Winkel zwischen $+135^\circ$ und $+225^\circ$ (Winkel α_1 und α_2 in Bild 6.2, S. 177) die x-Koordinate des Endpunktes den minimalen Wert aller vorkommenden x-Koordinaten und
- für Winkel zwischen $+225^\circ$ und $+315^\circ$ die y-Koordinate des Endpunktes den minimalen Wert aller vorkommenden y-Koordinaten

einnimmt [39].

Anschließend ist zu prüfen, ob durch diese Verschiebung wie in Bild 6.2 (S. 177) neue Schnittpunkte entstanden sind. Ist das der Fall, müssen die Kurvenabschnitte neu eingeteilt werden.

6.4 Ermitteln der Begrenzungen von Feldern

Beim Einteilen einer bewegten Ebene in Felder mit Hilfe der Gangpol- und der Übergangskurve wird zwischen außenliegenden und innenliegenden Feldern unterschieden. Außenliegende Felder sind diejenigen, die ans Unendliche grenzen. Sollen diese Felder durch einen Algorithmus umrahmt werden, müssen sie mit einer willkürlichen Grenze in großem Abstand vom Nullpunkt des Koordinatensystems zum Unendlichen abgegrenzt werden (Bild 6.1, S. 176). Liegen Endpunkte von Quasi-Asymptoten innerhalb dieser willkürlich gezogenen Grenzen, sind sie analog zu dem in Abschnitt 6.3 beschriebenen Algorithmus zu verschieben.



Legende:

- Anfangs- bzw. Endpunkte der Abschnitte
- ← Richtung vom Anfang zum Ende der Abschnitte

Bild 6.7: Einteilen von Gangpolkurve k_g und Übergangskurve k_u einer umlauffähigen Doppelschwinge in Abschnitte, die das außenliegende Feld begrenzen

6.4.1 Ermitteln der Begrenzungslinien außenliegender Felder

Beim Ermitteln der Begrenzungslinien von außenliegenden Feldern sind zwei verschiedene Vorgehensweisen notwendig:

- Existieren keine Quasi-Asymptoten von der Gangpol- und von der Übergangskurve, gibt es nur ein außenliegendes Feld (Bild 6.7). Dessen äußere Begrenzung ist willkürlich zu wählen (vgl. Bild 6.9, S. 188).
 - Der Kurvenabschnitt mit der kleinsten y-Koordinate aller Punkte der beteiligten Punktefolgen (Bild 6.7, S. 185) bildet den ersten Teil der Grenze des außenliegenden Feldes zu den innenliegenden Feldern. (In Bild 6.7 ist das der *1. Abschnitt*, der zwischen dem *1. Punkt des 1. Abschnitts* und dem *Knotenpunkt Nr. 2* liegt.)
 - Der 1. Kurvenabschnitt ist nun mit einer derartigen Durchlaufrichtung zu versehen, daß die Feldbegrenzung in mathematisch negativem Drehsinn durchlaufen wird (vgl. Abschnitt 6.4.2 und Bild 6.7, S. 185). Das ist notwendig, damit an seinem Endpunkt (in Bild 6.7 *Knotenpunkt Nr. 2*) schematisch die Entscheidung getroffen werden kann, welcher anschließende Kurvenabschnitt die Begrenzungslinie des außenliegenden Feldes fortsetzt.
 - Zum Ermitteln des Startpunktes des 1. Kurvenabschnitts (in Bild 6.7 der *1. Punkt des 1. Abschnitts*) muß dieser Abschnitt (der *1. Abschnitt*) von dem Punkt mit der kleinsten y-Koordinate (Bild 6.8) in der Richtung durchlaufen werden, daß der als nächstes erreichte Punkt der Punktefolge ein Punkt mit einer größeren x-Koordinate ist. Beim Folgen dieser Richtung wird man zu dem Endpunkt des Kurvenabschnitts (nämlich dem *1. Punkt des 1. Abschnitts*) gelangen, der als Startpunkt für die Suche nach der Feldbegrenzung zu verwenden ist.

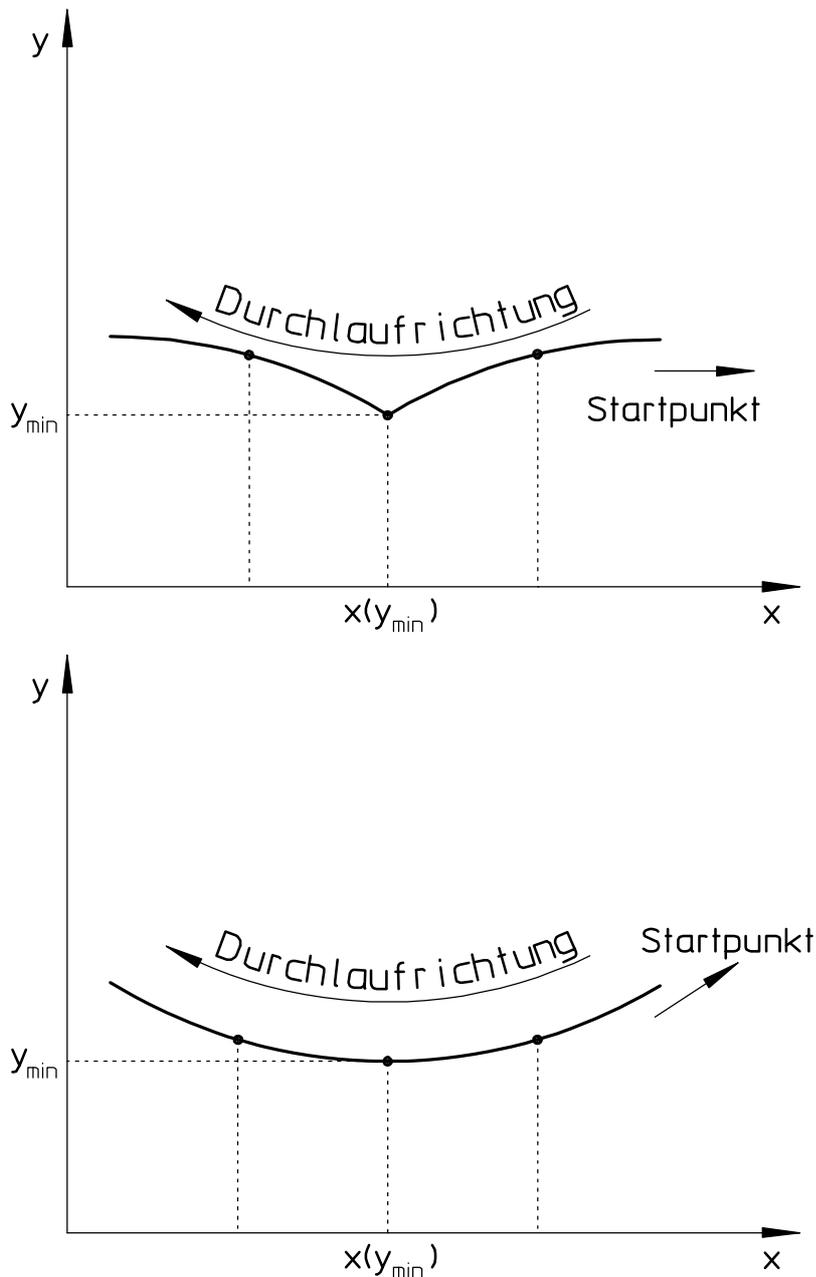


Bild 6.8: Die Durchlaufrichtung eines Polygons

- ◆ Wird kein Knotenpunkt (vgl. Bild 6.7, S. 185) gefunden (Bild 6.9), ist die gesuchte Begrenzungslinie geschlossen und die Suche wird beendet.
- ◆ Sollte es sich bei dem Punkt mit der kleinsten y-Koordinate um eine Spitze handeln (vgl. hierzu die Übergangskurve in Bild 6.9), deren beide benachbarten Punkte x-Koordinaten mit größeren oder aber mit kleineren Werten als die x-Koordinate der Spitze aufweisen (Bild 6.10, S. 189), so ist folgendermaßen die Suche nach dem Startpunkt des 1. Kurvenabschnitts zu beginnen: Der Startpunkt liegt in demjenigen Teil der Punktfolge, dessen Verbindungslinie mit der Spitze von der Spitze aus

gesehen den kleineren Winkel (in Bild 6.10 den Winkel α_1) zur Richtung der positiven x-Achse aufweist.

- Bei Vorhandensein von Quasi-Asymptoten beginnt die Feldeinteilung an einem Endpunkt einer Quasi-Asymptote (Bild 6.1, S. 176). Ein Kurvenabschnitt, der einen solchen Endpunkt aufweist, ist der erste, der zur Feldeinteilung verwendet wird. Ein Durchlaufen der Feldbegrenzung in mathematisch negativem Drehsinn ergibt sich durch das weitere Vorgehen von allein.

Willkürliche äußere Grenze für außenliegendes Feld

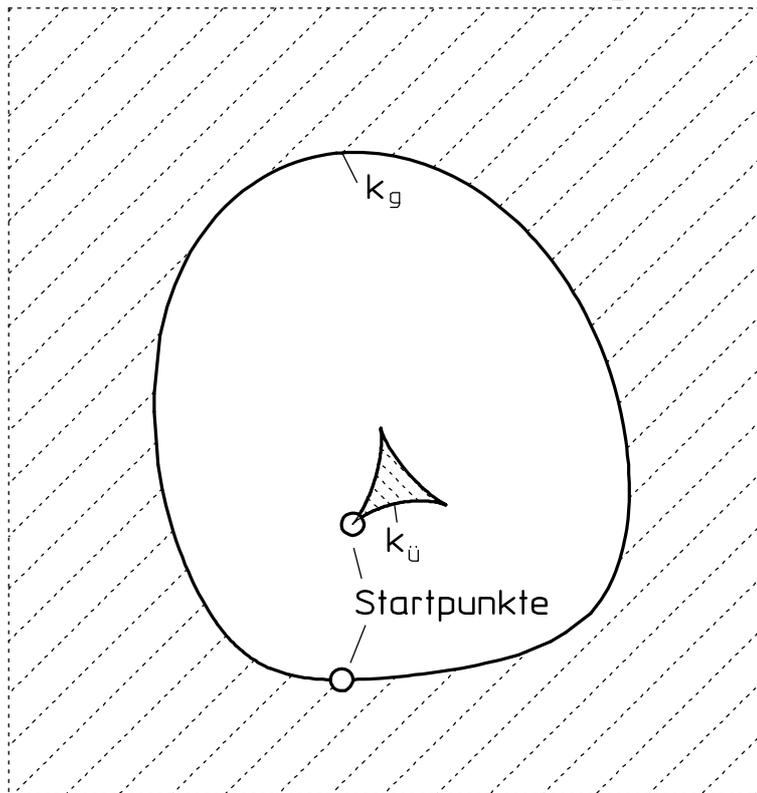


Bild 6.9: Die durch die Gangpolkurve k_g und die Übergangskurve $k_ü$ erzeugten Felder einer Doppelkurbel

Ist ein erster Kurvenabschnitt und sein Anfangspunkt für die Suche der Feldbegrenzung außenliegender Felder gefunden, wird er vom Anfangspunkt startend in mathematisch negativem Drehsinn durchlaufen. Anschließend muß festgestellt werden, wie die Feldbegrenzung am Ende des Kurvenabschnitts fortgesetzt werden kann.

- Handelt es sich um einen Schnittpunkt oder Berührungspunkt, werden alle Kurvenabschnitte $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ermittelt (Bild 6.11, S. 190), die den gleichen Punkt (in Bild 6.11 der Punkt $K_{üd}$) als Anfangs- oder Endpunkt aufweisen. Existiert keine Quasi-Asymptote, ist zu prüfen, ob dieser Punkt mit dem Anfangspunkt identisch ist, von dem

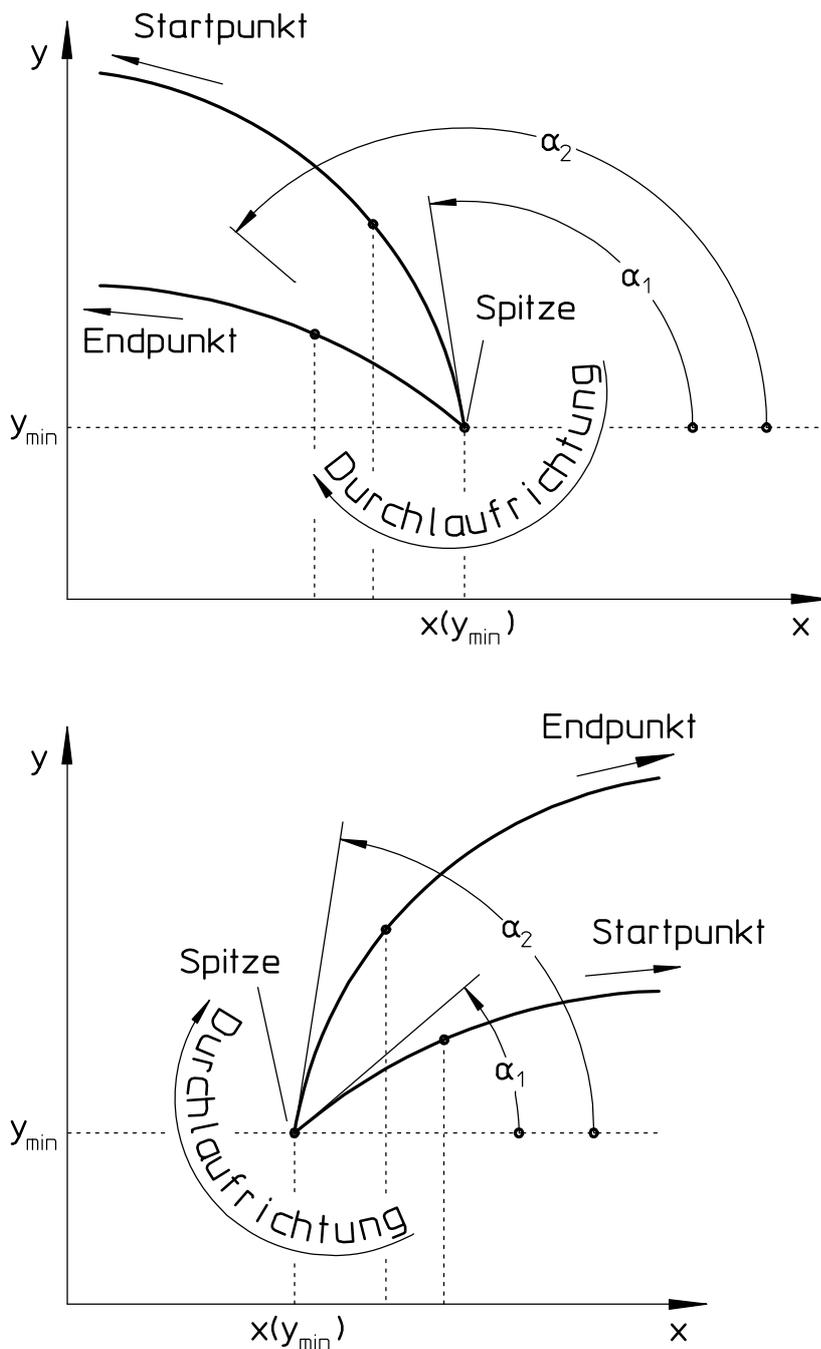


Bild 6.10: Die Durchlaufrichtung eines eine Spitze aufweisenden Polygons

aus die Feldeinteilung begonnen wurde. Ist das der Fall, ist die Ermittlung außenliegender Felder abgeschlossen. Ansonsten sind die Winkel α_i in diesem Punkt zwischen der positiven x-Achse und der Verbindungslinie der ersten bzw. der letzten beiden Punkte aller Kurvenabschnitte i zu bestimmen. Die Suche nach der Feldbegrenzung wird fortgesetzt mit dem Kurvenabschnitt, der die kleinste Winkeldifferenz $\Delta\alpha_i = \alpha_0 - \alpha_i$ zum zuletzt gefundenen zur Feldbegrenzung gehörenden Kurvenabschnitt 0 aufweist. Auf diese Weise wird beim Fehlen von Quasi-Asymptoten eine in mathematisch negativem Drehsinn durchlaufene Feldbegrenzung erzeugt (vergleiche Bild 6.7, S. 185), sind

Quasi-Asymptoten jedoch vorhanden, ergibt sich ein mathematisch positiver Drehsinn beim Durchlaufen einzelner außenliegender Felder (Vergleiche die je Feldbegrenzung durchnummerierten Pfeile in Bild 6.1, S. 176), während alle Kurvenabschnitte der äußeren Feldbegrenzung in mathematisch negativem Drehsinn abgearbeitet werden.

- Handelt es sich bei dem Endpunkt des Kurvenabschnitts um einen Endpunkt einer Quasi-Asymptote, wird das Feld durch eine Verbindungslinie zum Anfangspunkt der Feldbegrenzung des gesuchten Feldes geschlossen (vergleiche *Feld 1* in Bild 6.1, S. 176). Wurde der Endpunkt das erste Mal für eine Feldbegrenzung von außenliegenden Feldern benutzt, wird der als letzter gefundene Kurvenabschnitt mit entgegengesetztem Durchlaufsinne als erster Abschnitt für das Ermitteln eines weiteren außenliegenden Feldes verwendet.

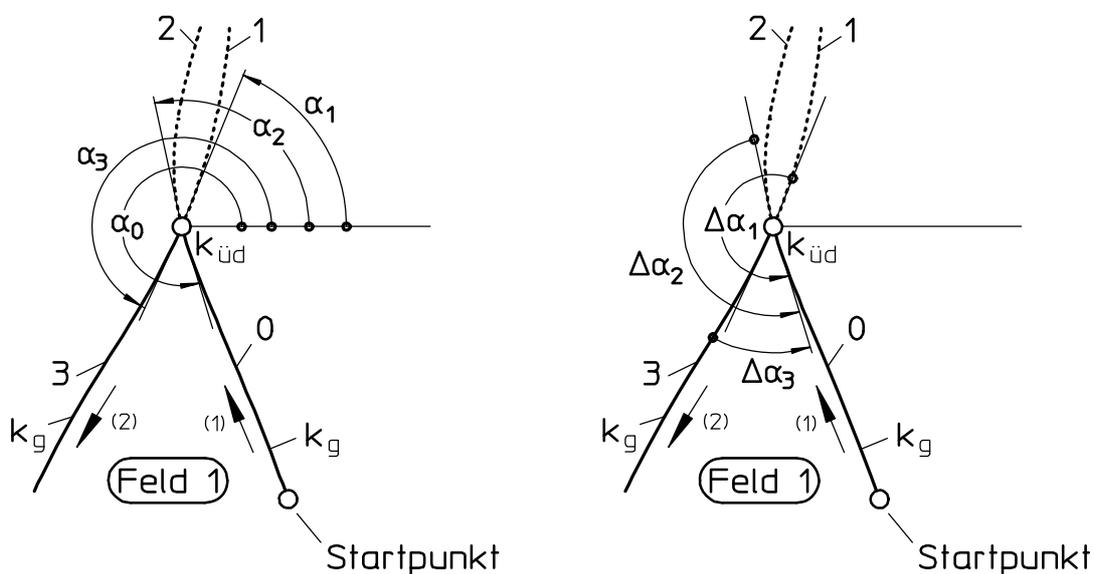


Bild 6.11: Ermitteln des die Feldeinteilung fortsetzenden Astes (2) der Gangpolkurve k_g einer Kurbelschwinge

6.4.2 Ermitteln der Begrenzungslinien innenliegender Felder

Beim Ermitteln von innenliegenden Feldern wird die Tatsache genutzt, daß jeder Kurvenabschnitt im Verlauf des Ermitteln aller Feldgrenzen zweimal verwendet wird, und zwar für beide Felder, die er voneinander abgrenzt, je einmal.

Die Suche nach der Begrenzungslinie eines innenliegenden Feldes wird bei einem beliebigen Kurvenabschnitt fortgesetzt, der im Verlauf des bisherigen Ermitteln der Feldgrenzen

der außen- und der innenliegenden Felder genau einmal benutzt wurde [vgl. in Bild 6.1 (S. 176) die mit einem großen Pfeil (außenliegendes Feld) und einem kleinen Pfeil (innenliegendes Feld) gekennzeichneten Kurvenabschnitte]. Der bisher einmal durchlaufene Kurvenabschnitt ist allerdings nun in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen. Dadurch wird erreicht, daß die Begrenzungslinie von innenliegenden Feldern im Gegensatz zu den Begrenzungslinien außenliegender Felder in mathematisch positivem Drehsinn durchlaufen werden. Auf diese Weise kann bei beiden Feldarten der gleiche Algorithmus für die Entscheidung eingesetzt werden, welcher Kurvenabschnitt an den gewählten Kurvenabschnitt anzuhängen ist.

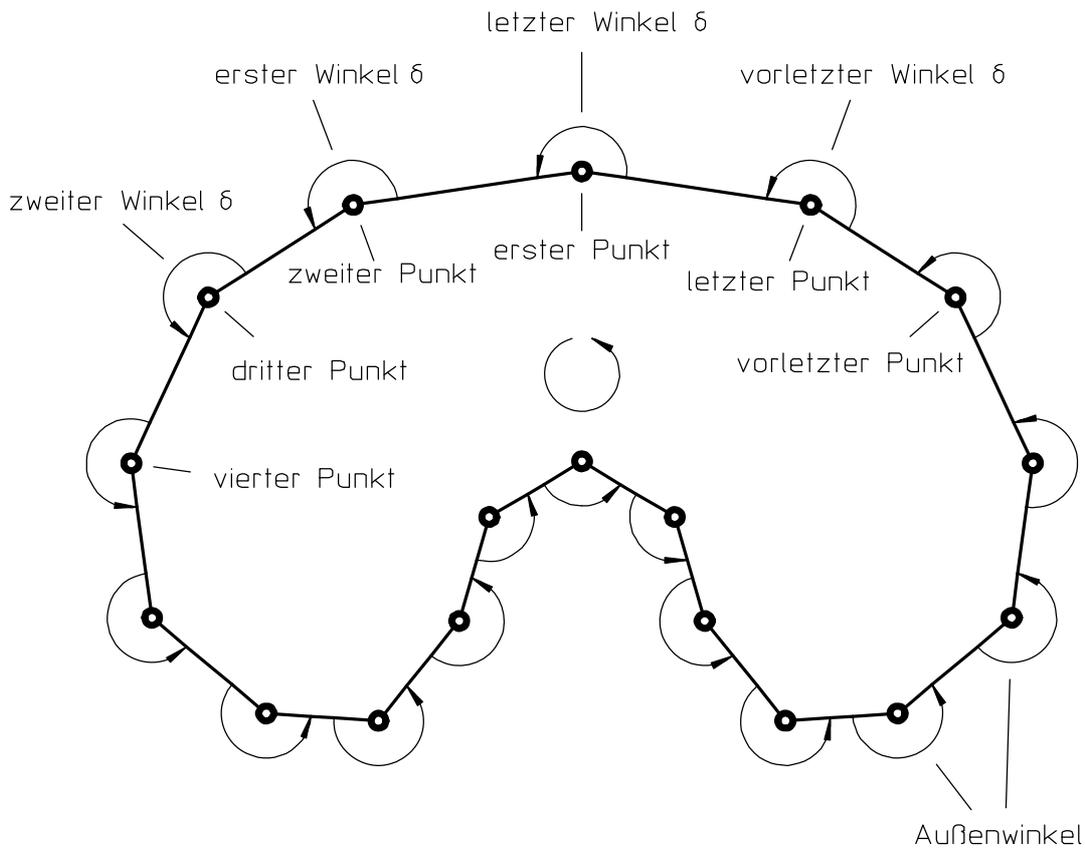
Das bedeutet, daß alle Kurvenabschnitte i ermittelt werden (vgl. Bild 6.11, S. 190), die den gleichen Anfangs- oder Endpunkt wie der Endpunkt des gewählten Kurvenabschnitts aufweisen (und bisher noch nicht zweimal als Feldbegrenzung verwendet wurden). Es ist dann zu prüfen, ob dieser Punkt mit dem Anfangspunkt identisch ist, von dem aus die Feldeinteilung begonnen wurde. Ist das der Fall, ist die Ermittlung dieses innenliegenden Feldes abgeschlossen, und die Suche nach der Feldbegrenzung innenliegender Felder kann mit dem nächsten nur einmal verwendeten Kurvenabschnitt fortgesetzt werden. Im anderen Fall sind die Winkel α_i im Endpunkt des betrachteten Kurvenabschnitts zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der Verbindungslinie der ersten bzw. der letzten beiden Punkte aller Kurvenabschnitte i zu bestimmen. Die Suche nach der Feldbegrenzung wird fortgesetzt mit dem Kurvenabschnitt, der die kleinste Winkeldifferenz $\Delta\alpha_i = \alpha_0 - \alpha_i$ zu dem Kurvenabschnitt 0 aufweist, der zur zuletzt gefundenen Feldbegrenzung gehört.

Werden keine einmal benutzten, statt dessen jedoch keinmal verwendete Kurvenabschnitte gefunden (vgl. die Übergangskurve $k_{\bar{u}}$ in Bild 6.9, S. 188), so werden alle nicht verwendeten Kurvenabschnitte von den anderen getrennt betrachtet, und die Suche nach außenliegenden und innenliegenden Feldern beginnt von neuem. Die Feldbegrenzung des neu ermittelten außenliegenden Feldes ist allerdings die innere Feldbegrenzung eines innenliegenden Feldes. Zu welchem Feld diese Feldbegrenzung gehört, kann festgestellt werden, indem getestet wird, in welchem Feld ein Punkt dieser Feldbegrenzung liegt. Der Algorithmus zum Testen, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Feldes liegt, wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

6.4.2.1 Algorithmus zum Feststellen, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Feldes liegt.

Ist ein Feld durch eine sich nicht selbst schneidende und sich nicht selbst berührende Kurve in der Form einer Punktfolge und damit als Polygon gegeben, so sind folgende Schritte notwendig, um festzustellen, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Feldes liegt:

Durchlauf gegen den Uhrzeigersinn



Durchlauf im Uhrzeigersinn

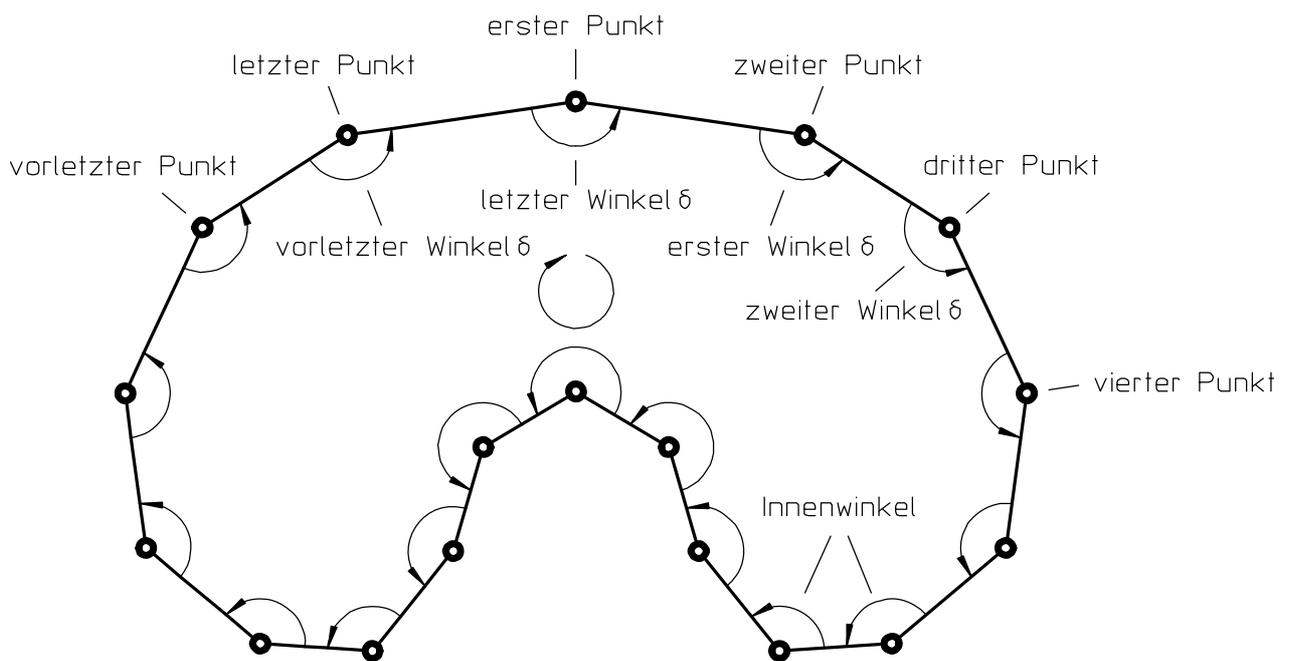


Bild 6.12: Bestimmen des Durchlaufsinns eines Polygons

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

1. Es ist festzustellen, ob das Polygon im Uhrzeigersinn (in mathematisch negativer Drehrichtung) oder im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.
2. Es ist die Verbindungsstrecke mit dem geringsten Abstand zum vorgegebenen Punkt mit Hilfe des in Abschnitt 6.1.1 geschilderten Algorithmus zu ermitteln.
3. Anhand einer Fallunterscheidung ist festzustellen, ob der Punkt innerhalb oder außerhalb des Polygons liegt.

6.4.2.1.1 Ermitteln des Umlaufsinn eines geschlossenen Polygons ohne Selbstschnittpunkte

Mit Hilfe des Gesamtinnenwinkels

$$\delta_{\text{Innen}} = (2 \cdot i - 4) \cdot 90^\circ \quad (6.7)$$

[25] läßt sich ermitteln, ob ein durch i Punkte gegebenes geschlossenes Polygon ohne Selbstschnittpunkte im Uhrzeigersinn durchlaufen wird [40]. Ist die Summe aller Winkel δ_i eines Kurvenzuges (Bild 6.12) gleich dem Gesamtinnenwinkel δ_{Innen} , so wird das Polygon im Uhrzeigersinn (in mathematisch negativem Drehsinn) - im anderen Fall im Gegenuhrzeigersinn - durchlaufen.

Rechentechnisch schneller ist allerdings ein Algorithmus, der analog zu Abschnitt 6.4.1 als erstes den Punkt P_i des Polygons mit der kleinsten y -Koordinate ermittelt:

- Weisen beide benachbarten Punkte P_{i-1} und P_{i+1} (Bild 6.13) des Punktes P_i kleinere oder aber größere x -Koordinaten auf als der Punkt P_i selbst, so wird das Polygon im Uhrzeigersinn (in mathematisch negativem Drehsinn) durchlaufen, wenn der Winkel α_{i+1} der Geraden $P_i P_{i+1}$ größer als der Winkel α_{i-1} der Geraden $P_i P_{i-1}$ ist. Im anderen Fall wird das Polygon im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.
- Weisen ein benachbarter Punkt des Punktes P_i eine kleinere (Bild 6.14, S. 195) und der andere benachbarte Punkt eine größere x -Koordinate als der Punkt P_i selbst auf, so wird das Polygon im Uhrzeigersinn (in mathematisch negativem Drehsinn) durchlaufen, wenn der Punkt P_{i+1} eine kleinere x -Koordinate als der Punkt P_i aufweist. Im anderen Fall wird das Polygon im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen.

6.4.2.1.2 Ermitteln, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Polygons liegt

Wird ein Polygon (ggf. durch Umkehrung der Reihenfolge seiner Punkte) im Uhrzeigersinn durchlaufen (Bild 6.15, S. 196) und ist die Verbindungsline $\overline{P_i P_{i+1}}$ zweier benachbarter Punkte P_i und P_{i+1} des Polygons bekannt, die den geringsten Abstand a_S zu einem vor-

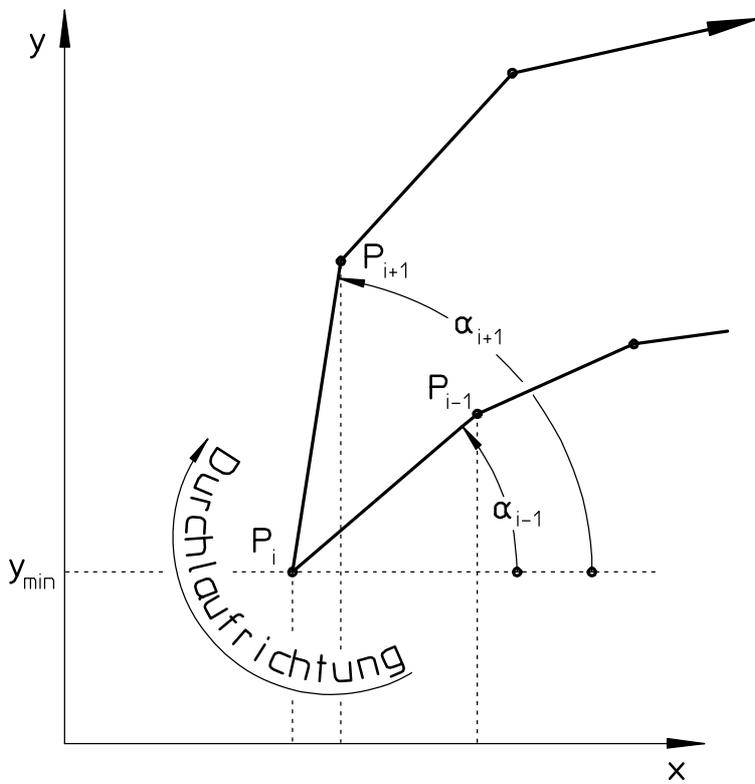
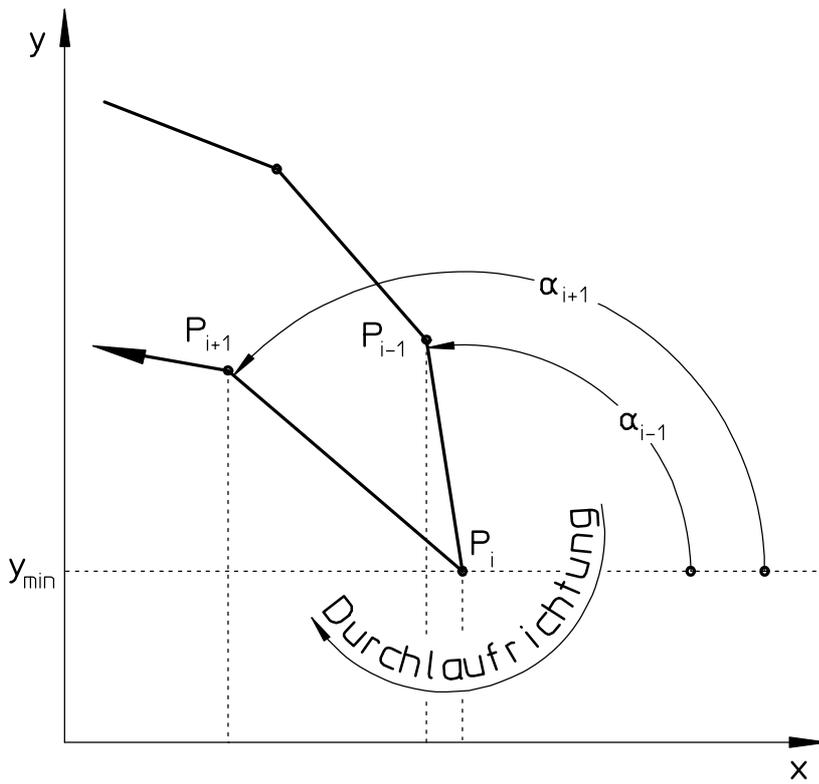


Bild 6.13: Bestimmen der Durchlaufrichtung eines Polygons

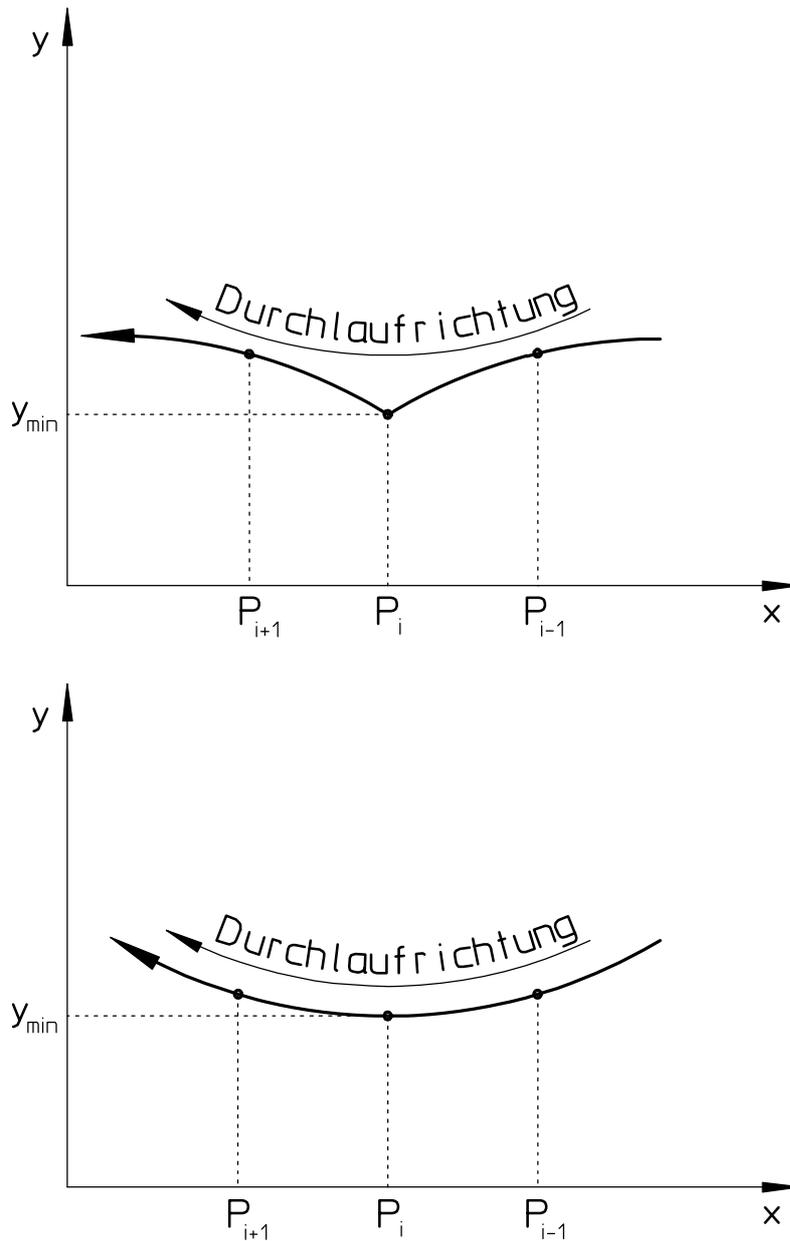


Bild 6.14: Die Durchlaufrichtung eines Polygons

gegebenen Punkt Q aufweist (vgl. Abschnitt 6.1.1 und Bild 6.3, S. 178) so können die im folgenden aufgeführten Fallunterscheidungen getroffen werden [38]. Bei diesen Fallunterscheidungen wird vorausgesetzt, daß dann der Abstand a_s von einer Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ als der kleinste ermittelt wurde, wenn das Lot a_s auf die Strecke $\overline{P_i P_{i+1}}$ [vgl. Gleichung (6.4)] oder wenn $\overline{P_i Q}$ den geringsten Abstand darstellt. Käme der Abstand $\overline{P_{i+1} Q}$ hierfür in Betracht, würde allerdings die Strecke $\overline{P_{i+1} P_{i+2}}$ als Bezugsstrecke gewählt.

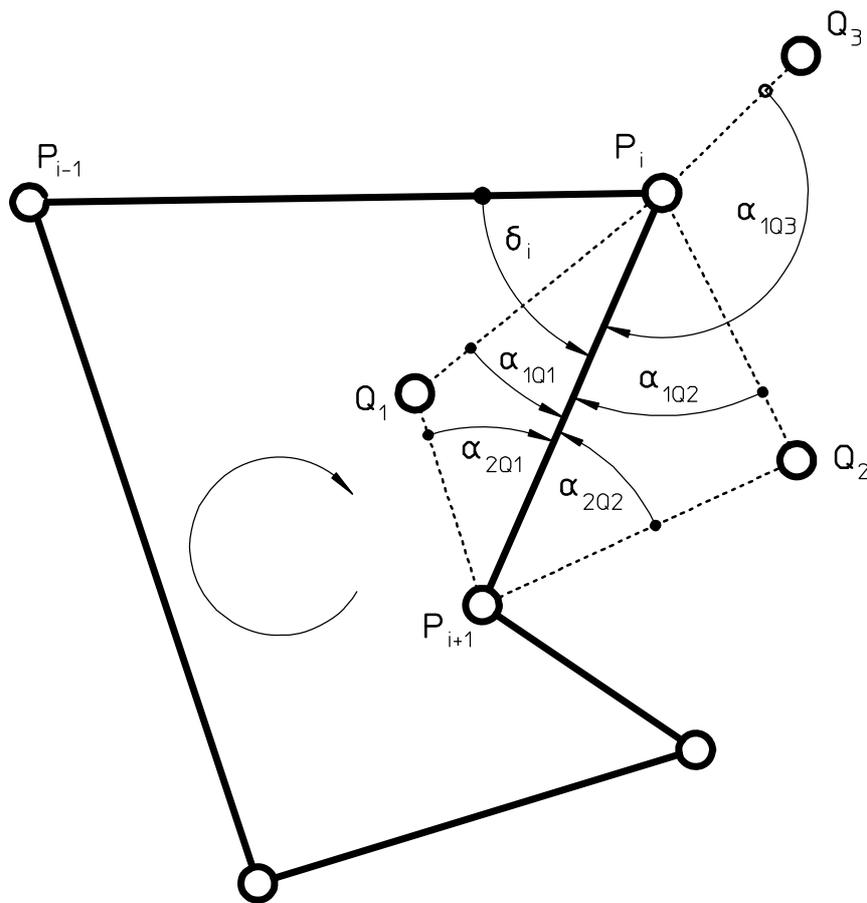


Bild 6.15: Ermitteln, ob ein Punkt Q innerhalb oder außerhalb eines Polygons liegt, wenn Q auf der Normalen der nächstgelegenen Polygonlinie liegt

In einem ersten Schritt sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Ein Punkt Q (in Bild 6.15 der Punkt Q_1) liegt innerhalb des Polygons, wenn für den Winkel α_1 (hier α_{1Q1}) nach Gleichung (6.1) gilt:

$$0 \leq \alpha_1 \leq +90^\circ . \quad (6.8)$$

- Ein Punkt Q (in Bild 6.15 der Punkt Q_2) liegt außerhalb des Polygons, wenn für den Winkel α_1 (hier α_{1Q2}) nach Gleichung (6.1) gilt:

$$-90 \leq \alpha_1 \leq 0^\circ . \quad (6.9)$$

- Liegt der Winkel α_1 (in Bild 6.15 der Winkel α_{1Q3}) eines Punktes Q (hier Q_3) außerhalb des Intervalls $-90 \leq \alpha_1 \leq +90^\circ$, so ist der Winkel

$$* P_{i-1}P_iP_{i+1} = \delta_i = \arctan\left(\frac{y_{P_{i+1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i+1}} - x_{P_i}}\right) - \arctan\left(\frac{y_{P_{i-1}} - y_{P_i}}{x_{P_{i-1}} - x_{P_i}}\right) \quad (6.10)$$

zu ermitteln. Der Winkel ist notwendig, um zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

- Liegt der Winkel δ_i innerhalb der Intervalls $0 \leq \delta_1 \leq +180^\circ$, so befindet sich der Punkt Q (hier der Punkt Q_3) außerhalb des Polygons. [Würde der Punkt Q innerhalb des Polygons liegen, so würde auf jeden Fall der Abstand des Punktes Q zu der Strecke $\overline{P_{i-1}P_i}$ kleiner sein als der Abstand $\overline{P_iQ}$, so daß eine andere Bezugsstrecke zu verwenden wäre (s. o.).]
- Liegt der Winkel δ_i außerhalb der Intervalls $0 \leq \delta_1 \leq +180^\circ$ (vgl. Punkt Q_3 in Bild 6.16), so befindet sich der Punkt Q (hier der Punkt Q_3) innerhalb des Polygons. (Bei einem außerhalb liegenden Punkt Q würde auf jeden Fall der Abstand des Punktes Q zu der Strecke $\overline{P_{i-1}P_i}$ kleiner sein als der Abstand $\overline{P_iQ}$, so daß eine andere Bezugsstrecke zu verwenden wäre.)

6.5 Ermitteln der Selbstschnittpunkte der Bahnen von Punkten der gefundenen Felder

Sind die Felder der Koppellebene eines viergliedrigen Gelenkgetriebes bekannt, deren Punkte Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten aufweisen, so läßt sich mit Hilfe der in Abschnitt 6.6 aufgestellten Systematik bestimmen, wie viele Selbstschnittpunkte die Bahn eines Punktes eines vorgegebenen Feldes aufweist.

Bei anderen Getriebebauformen ist das Bestimmen der Anzahl der Selbstschnittpunkte nicht so einfach möglich. Wird die Anzahl der Selbstschnittpunkte der Bahn eines Punktes mit dem in Abschnitt 5.1.2.3 beschriebenen und in Abschnitt 6.1 auf die Suche von Selbstschnittpunkten erweiterten Algorithmus berechnet, so sind damit die Selbstschnittpunkte aller Bahnen von Punkten des gleichen Feldes bekannt.

Sollen rechnerintern die Selbstschnittpunkte der Bahnen von Punkten eines Feldes ermittelt werden, so sind

- gezielt (s. u.) Punkte vorzugeben,
- mit Hilfe des in Abschnitt 6.4.2.1 beschriebenen Algorithmus zu prüfen, ob der Punkt tatsächlich in dem Feld liegt, für das er gezielt (s. u.) vorgeschlagen wurde, und
- die Anzahl der Selbstschnittpunkte der Bahn des vorgegebenen Punktes zu ermitteln.

Für die gezielte Vorgabe eines Punktes, der innerhalb eines gegebenen Feldes liegen soll, ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

- Handelt es sich um ein außenliegendes Feld, dessen (innere) Begrenzung keine Quasi-Asymptote aufweist (vgl. Bild 6.7, S. 185), so liegt jeder Punkt mit einer kleineren y -

Koordinate als die minimale y-Koordinate aller Punkte der Begrenzungslinie auf jeden Fall innerhalb des außenliegenden Feldes. Als x-Koordinate kann die x-Koordinate des Punktes der Feldbegrenzung mit der minimalen y-Koordinate verwendet werden.

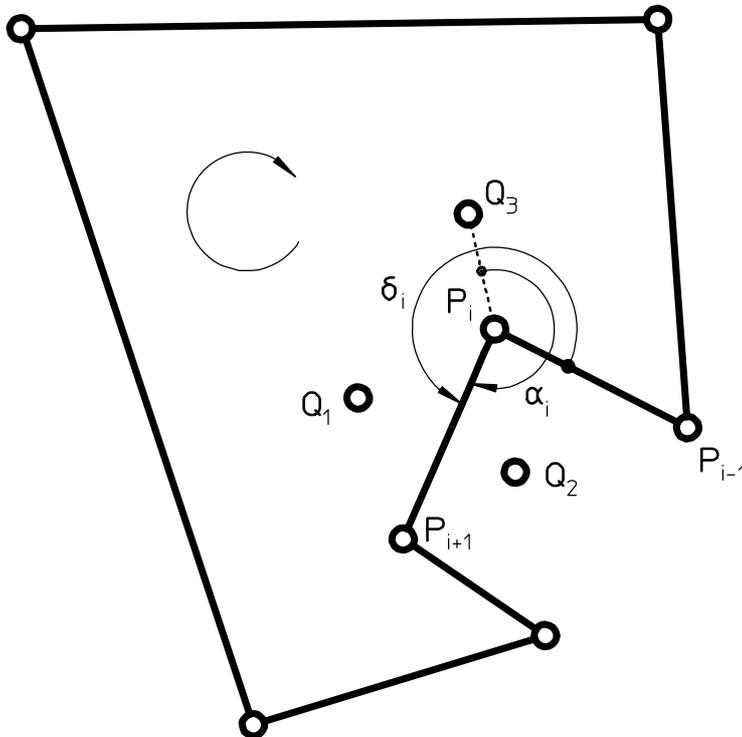
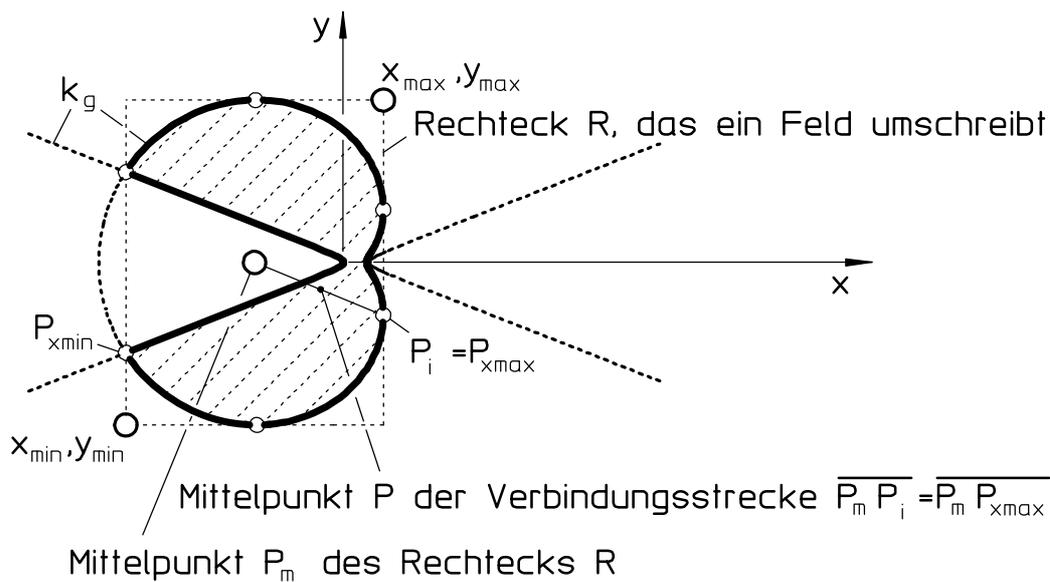


Bild 6.16: Ermitteln, ob ein Punkt Q innerhalb oder außerhalb eines Polygons liegt, wenn Q nicht auf der Normalen der nächstgelegenen Polygonlinie liegt

- Bei allen anderen Feldern ist der Mittelpunkt P_m (Bild 6.16a) des das Feld umschreibenden Rechtecks R zu verwenden. Sollte der Punkt P_m (wie in Bild 6.16a) nicht innerhalb der Feldbegrenzung liegen, so ist ein Punkt P (z. B. der Mittelpunkt) auf der Verbindungsstrecke $\overline{P_m P_i}$ zu wählen, die den Punkt P_m mit einem eine minimale oder eine maximale x- bzw. y-Koordinate aufweisenden Punkt P_i der Feldbegrenzung verbindet (z. B. in Bild 6.16a ist $P_i = P_{x_{\max}}$). Der Punkt P ist dann solange zum Punkt P_i auf der Feldbegrenzung hin zu verschieben, bis er innerhalb der äußeren Feldbegrenzung liegt. Allerdings sind für diese Vorgehensweise nicht alle Punkte auf der Feldbegrenzung mit minimalen bzw. maximalen x- oder y-Koordinaten geeignet (vgl. Punkt $P_{x_{\min}}$ in Bild 6.16a)

Weist ein innenliegendes Feld eine innere und eine äußere Feldbegrenzung auf (vgl. das nicht schraffierte Feld in Bild 6.9, S. 188), so ist für jeden innerhalb der äußeren Feldbegrenzung liegenden Punkt zu prüfen, ob er sich außerhalb der inneren Feldbegrenzung befindet. Solange das nicht der Fall ist, ist der Punkt, dessen Bahn analysiert werden soll, weiter zu einem beliebigen Punkt auf der äußeren Feldbegrenzung hin zu verschieben.



Legende:

- : Punkt des Feldes mit maximaler oder minimaler x- oder y-Koordinate

Bild 6.16a: Ermitteln eines Punktes P innerhalb eines Feldes der Gangpolkurve k_g

6.6 Systematik zu der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe der Gangpol- und der Übergangskurve

Da die Gangpolkurve relativ leicht, die Übergangskurve aber bedeutend schwieriger zu ermitteln ist, soll im folgenden ein Überblick über den typischen Verlauf aller während dieser Arbeit ermittelten Übergangskurven in Abhängigkeit vom typischen Verlauf der jeweils zugehörigen Gangpolkurven gegeben werden. Dieser Überblick erleichtert es, Punkte von viergliedrigen Gelenkgetrieben zu finden, die eine vorgegebene Anzahl an Selbstschnittpunkten aufweisen, wenn nur die Gangpolkurve, nicht aber der tatsächliche Verlauf der Übergangskurve bekannt ist.

6.6.1 Stand der Technik

In [1] und [6] sind typische Verläufe der Gangpol- und der Übergangskurven von umlauffähigen und totalschwingfähigen Getrieben erstmals aufgeführt worden. Zum Ermitteln der Übergangskurven wurden dabei einige der in dieser Arbeit entwickelten Programme zur Verfügung gestellt, deren Algorithmen in den Abschnitten 5.1.2 und 5.2.4.1 beschrieben sind. Die Übergangskurve war für die [1] zugrundeliegende Untersuchung sehr hilfreich, da Punkte auf ihr und in den von ihr abgetrennten Feldern Bahnen erzeugen, die sich von den Bahnen der Punkte benachbarter Felder unterscheiden. Die Kenntnis der Übergangskurve führte z. B. zur Entdeckung der Koppelpunktbahnen mit drei Selbstschnittpunkten von Kurbelschwingen. (In einer Studienarbeit [41] trat eine Übergangskurve entsprechend Bild 2.19, S. 30, auf, die allerdings näher an der Gangpolkurve als in diesem Bild lag. Da zur damaligen Zeit nur Übergangskurven von Kurbelschwingen entsprechend Bild 2.7, S. 16, bekannt waren, wurde zuerst nach Fehlern im Programm zum Ermitteln der Übergangskurve gesucht. Während dieser Fehlersuche wurden die Koppelpunktbahnen der durch die Übergangskurve abgegrenzten Felder analysiert, und es wurden dabei Koppelpunktbahnen mit drei Selbstschnittpunkten entdeckt, wodurch u. a. der Verlauf der Übergangskurve bestätigt wurde.)

Da in [1] systematisch nach allen typischen Verläufen von Koppelpunktbahnen, nicht aber nach allen typischen Verläufen von Gangpolkurven gesucht wurde, ist die Aufzählung der bei dieser Untersuchung aufgetretenen Verläufe der Gangpolkurve je Getriebetyp (vgl. [42]) nicht vollständig.

6.6.2 Systematische Suche nach den typischen Verläufen von Gangpol- und Übergangskurve bei viergliedrigen Gelenkgetrieben

Die systematische Suche nach typischen Verläufen von Gangpol- und Übergangskurven gliedert sich in drei Abschnitte:

- Zuerst wurden von allen bekannten Arten ebener viergliedriger Gelenkgetriebe [42], deren Abmessungen willkürlich gewählt und variiert wurden, die Gangpolkurven und die Übergangskurven ermittelt.
- Anschließend wurde versucht, die typischen Verläufe der Gangpolkurven zu ordnen (vgl. Bild 6.17, das in Abschnitt 6.6.3 erläutert wird sowie die dazugehörige Tabelle 6.1 auf S. 202/203). Das Ziel bestand darin, eine Ordnung zu finden, aus der hervorgeht, wie von einem typischen Verlauf zu einem anderen gewechselt werden kann. Auf diese Weise entstanden „weiße Felder“ in Bild 6.17, die durch Variation der Getriebeabmessungen gefüllt werden konnten.

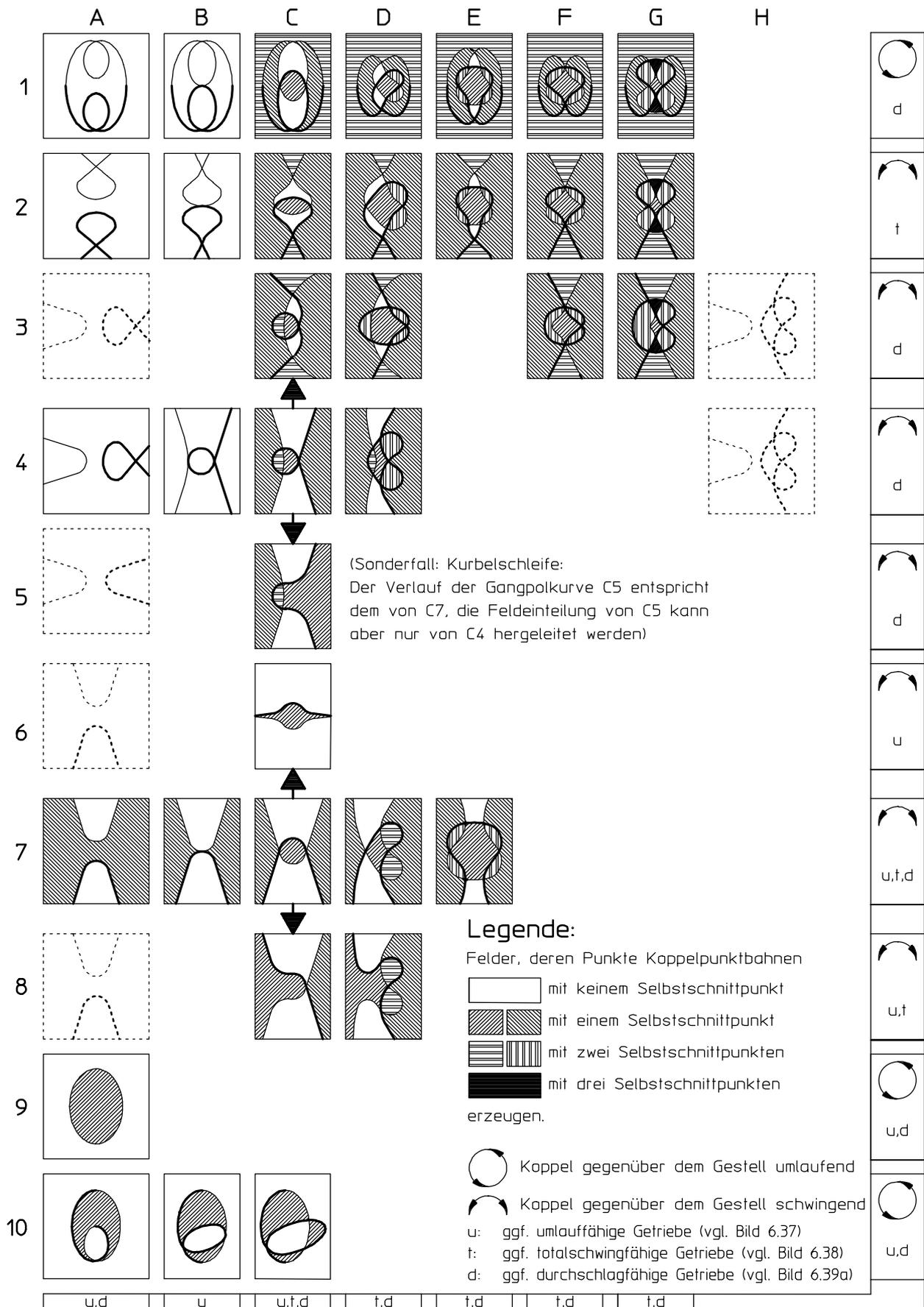


Bild 6.17: Die typischen Verläufe der Gangpolkurven von viergliedrigen Gelenkgetrieben (Weitere Einzelheiten siehe Abschnitt 6.6.3 und Tafel 6.1)

Tabelle 6.1: Typische Verläufe der Gangpolkurve k_g von viergliedrigen Gelenkgetrieben und deren Einfluß auf die Selbstschnittpunkte der Koppelpunktbahnen k_k

Getriebetyp	Lauffähigkeit	Kurz- zei- chen	Verlauf der Gang- polkurve k_g in Bild 6.17 ohne Besonderheiten	Verlauf von k_g mit parallelen Asymptoten ¹⁾ in Bild 6.17	Verlauf von k_g mit Selbstberührungspunkt (✕) bzw. Dreifachpunkt (*) in Bild 6.17	$n_{sg}^{a)}$	$n_{su}^{b)}$	$n_{sd}^{c)}$
Kurbelschwinge	umlauffähig	u-s	C7 (Bild 6.1)	□ / x: C8 ²⁾ (Bild 6.19)	✕ : B7 ³⁾ (Bild 6.24)	0 ... 1	1	0
Doppelkurbel	umlauffähig	u-u	A9 (Bild 6.9)	-	-	0 ... 1	1	0
Doppelschwinge	umlauffähig	s-s	C10 (Bild 6.7)	-	✕ : B10 ³⁾ (Bild 6..27)	0 ... 1	1	0
zentrische Schubkurbel	umlauffähig	u-g	-	-	✕ : B7 ³⁾	0 ... 1	0	0
versetzte Schubkurbel	umlauffähig	u-g	C7	-	-	0 ... 1	1	0
zentrische Schubschwinge	umlauffähig	s-g	-	-	✕ : B10 ³⁾	0 ... 1	0	0
versetzte Schubschwinge	umlauffähig	s-g	C10	-	-	0 ... 1	1	0
Kurbelschleife mit umlaufendem Schleifenglied	umlauffähig	u-u	A9	-	-	0 ... 1	1	0
zentrische Kurbelschleife mit schwingendem Schleifengl.	umlauffähig	u-s	-	C6 ⁴⁾ (Bild 6.23a)	-	0 ... 1	0/1	0
versetzte Kurbelschleife mit schwingendem Schleifengl.	umlauffähig	u-s	-	C8 ²⁾ (Bild 6.23a)	-	0 ... 1	0/1	0
Doppelaußenschwinge	totalschwingfähig	as-as	C7 (Bild 3.10) ... E7	-	-	0 ... 1/2	0/1	0
Außen-Innenschwinge	totalschwingfähig	as-is	C2 ... D2, C7 ... D7	□ / □: C7 ... D7 ⁵⁾ (Bild 6.30)	-	0 ... 1/2	0/1	0
Doppelinnenschwinge	totalschwingfähig	is-is	C2 ... E2, G2, C7 ... E7	x / x: C7, D7 (Bild 6.29), E7 ⁵⁾	* : F2 ⁶⁾ (Bild 3.2)	0/1...1/2/ 3	0	0
Schubschwinge	totalschwingfähig	ss-ig	D2 ... E2, C7 ... D7	C7 (Bild 6.22) ... D7 ⁵⁾	-	0 ... 1/2	0	0
Schwingschleife	totalschwingfähig	as-ss		C8 ... D8 ²⁾	-	0 ... 1/2	0/1	0

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

Außen-Innenschwinge	durchschlagfähig	as-is	C1 ... D1	-	-	0 ... 2	1	1
Doppelinnenschwinge	durchschlagfähig	is-is	C1 ... E1, G1	-	* : F1 ⁶⁾	0/1 ... 2/3	1	1
Kurbelinnenschwinge	durchschlagfähig	2u-is	C3 ... D3, G3, C4, D4	x / x: C4, D4 ⁷⁾	* : F3 ⁶⁾	0/1 ... 2/3	1	1
Kurbelaußenschwinge	durchschlagfähig	2u-as	C4 (Bild 6.2), D4	-	-	0 ... 2	1	1
Doppelkurbel	durchschlagfähig	2u-2u	A9 (Bild 3.11)	-	-	0 ... 1	1	1
Schubkurbel	durchschlagfähig	2u-ig	C3, C4	C4 ⁷⁾	-	0 ... 2	1	1
Schubschwinge	durchschlagfähig	ss-ig	C1 ... D1	-	-	0 ... 2	1	1
Kurbelschleife mit zweifach umlaufendem Schleifenglied	durchschlagfähig	2u-2u	A9	-	-	0 ... 1	1	1
Kurbelschleife m. schw. Schl.-gl.	durchschlagfähig	2u-ss	-	C5 ²⁾	-	0 ... 2	1	1
Parallelkurbel	durchschlagfähig	u-u	keine Gangpolk.	-	-	-	-	-
Antiparallelkurbel	durchschlagfähig	u-u	A7	-	-	0 ... 1	0	0
Galloway 1. Art	durchschlagfähig	2u-u	A9	-	-	0 ... 1	0	0
Galloway 2. Art	durchschlagfähig	u-is	A10	-	-	0 ... 1	0	0
gleichschenklige Schubkurbel	durchschlagfähig	u-ig	Kardanröderpaar	-	-	0 bzw. 2)	(-1)	0
Kurbelschleife mit einfach umlaufendem Schleifenglied	durchschlagfähig	2u-u	A9	-	-	0 ... 1	0	0

- 1) / bedeutet: Asymptoten, die parallel sind, treten immer in zwei (verschiedenen) Viereckparallellagen auf.
 - / x bedeutet: Asymptoten, die parallel sind, treten immer in der Viereck- und in der Kreuzparallellage auf.
 - x / x bedeutet: Asymptoten, die parallel sind, treten immer in zwei (verschiedenen) Kreuzparallellagen auf.
 - 2) Sonderfall der Gangpolkurvenform, bei der 1 Selbstschnittpunkt im Unendlichen liegt.
 - 3) Sonderfall der Gangpolkurvenform, bei der 2 Selbstschnittpunkte zusammenfallen.
 - 4) Sonderfall der Gangpolkurvenform, bei der 2 Selbstschnittpunkte im Unendlichen liegt.
 - 5) Grenzfall der Gangpolkurvenform von C7 nach C2 bzw. von D7 nach D2 (und ggf. von E7 nach E2), bei der 2 Selbstschnittpunkte im Unendlichen liegen.
 - 6) Sonderfall der Gangpolkurvenform, bei der 2 mal 3 Selbstschnittpunkte zu einem Dreifachschnittpunkte zusammenfallen.
 - 7) Grenzfall der Gangpolkurvenform von C4 nach C3 (und ggf. von D4 nach D3), bei der 2 Selbstschnittpunkte im Unendlichen liegen.
- a) n_{sg} = Anzahl der durch k_g erklärten Selbstschnittpunkte von k_k
 b) n_{su} = Anzahl der Übergangskurvenäste, die die Anzahl der Selbstschnittpunkte der Koppelverbindungen k_k erhöhen können.
 c) $n_{sd} =$ Kennzahl für Verzweigungslagen: keine $\Rightarrow n_{sd} = 0$
 eine $\Rightarrow n_{sd} = 1$
 zwei $\Rightarrow n_{sd} = 0$

- In einem weiteren Arbeitsschritt wurden Grenzfälle der Abmessungen viergliedriger Gelenkgetriebe betrachtet. Diese Grenzfälle werden in den Abschnitten 6.6.2.1 bis 6.6.2.4 vorgestellt.
- Einen weiteren Grenzfall stellen durchschlagfähige Getriebe dar. Da sich bei allen Grenzfällen die vierte Gliedlänge aus den drei anderen - bei durchschlagfähigen z. B. mit Hilfe des *Satzes von GRASHOFF*

$$\ell_{\min} + \ell_{\max} = \ell' + \ell'' \quad - \quad (6.11)$$

ermitteln läßt und eine der Gliedlängen den Maßstab festlegt, brauchen nur zwei Gliedlängen in den durch den Getriebetyp [42] vorgegebenen Grenzen variiert zu werden, um einen Überblick über den jeweils typischen Verlauf der Gangpolkurve zu erhalten. Für jeden gefundenen typischen Verlauf der Gangpolkurve werden anschließend die Abmessungen des zugrunde liegenden Getriebes so variiert, daß die Gangpolkurven derjenigen benachbarten Getriebe ermittelt werden können, deren Gliederabmessungen die den Grenzfall beschreibende Gleichung [z. B. Gl. (6.11)] nicht mehr erfüllen. Für Durchschlaggetriebe bedeutet das z. B., daß die Gangpolkurven aller benachbarten umlauffähigen und totalschwingfähigen Getriebe berechnet werden.

6.6.2.1 Selbstschnittpunkte der Gangpolkurve betreffende Grenzfälle umlauffähiger viergliedriger Gelenkgetriebe

Während der dem Koppelkurvenatlas [1] zugrunde liegenden Untersuchung wurde nur ein typischer Verlauf der Gangpolkurve von umlauffähigen Kurbelschwingen entsprechend Bild 2.7 (S. 16) gefunden (vgl. auch ikonische Darstellung C7 in Bild 6.17, S. 201). Dieser typische Verlauf der Gangpolkurve weist zwei Selbstschnittpunkte auf. In dem Selbstschnittpunkt, der gleichzeitig einen Dauer-Übergangskurvenpunkt $K_{\text{üd}}$ darstellt, liegt das Koppelgelenk B (vgl. Bild 6.18). Der Punkt B durchfährt hin- und herlaufend einen Kreisbogen, während der andere Selbstschnittpunkt (der Punkt K in Bild 6.18) der Gangpolkurve eine allgemeine Bahn mit zwei Spitzen erzeugt.

Zur Suche einer Gangpolkurve einer Kurbelschwinge mit nur einem Selbstschnittpunkt kann das Verfahren nach HAIN [21] für die Bestimmung des Punktes, dessen Bahn zwei Spitzen erzeugt, verwendet werden (Bild 6.18):

- Die Gangpolkurve weist nur einen Selbstschnittpunkt auf, wenn die Glieder $\overline{A_0A}$ und $\overline{B_0B}$ in Bild 6.18 parallel liegen und daher kein Schnittpunkt K zwischen beiden Gliedern im Endlichen existiert. Die beiden Asymptoten der Gangpolkurve sind in diesem Fall ebenfalls parallel.

6.6.2.1.1 Gangpolkurven umlauffähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten

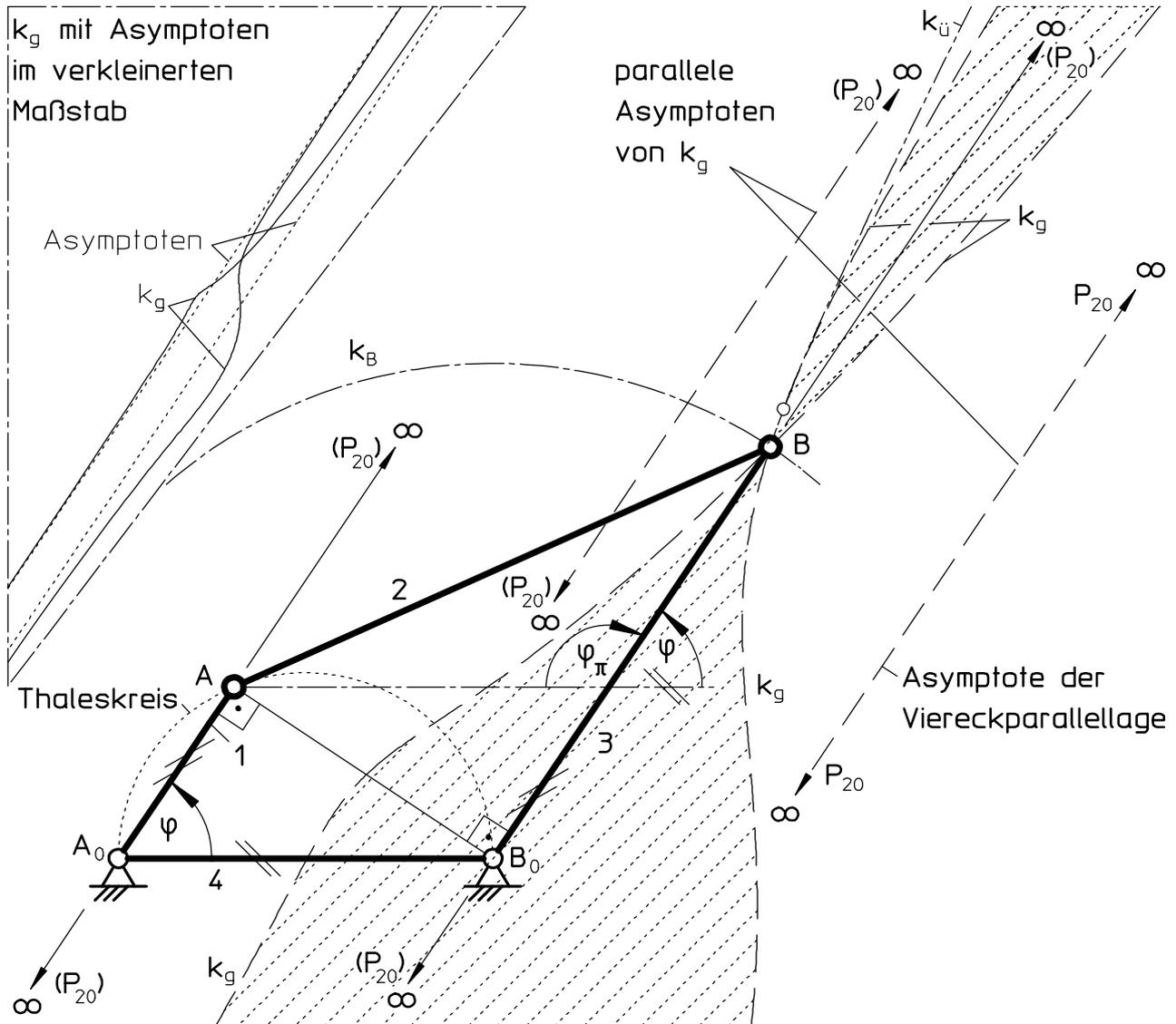


Bild 6.19: Konstruktion einer Kurbelschwinge in der Viereckparallellage, deren Gangpolkurve parallele Asymptoten aufweist

Werden die Abmessungen der in Bild 6.18 (S. 205) gezeigten Kurbelschwinge so geändert, daß die Glieder A_0A und B_0B parallel liegen (Bild 6.19), dann liegt der Schnittpunkt K des Bildes 6.18 im Unendlichen, und das Feld, auf dessen Grenzlinie der Punkt K liegt (und ebenfalls der Punkt B), grenzt ebenfalls ans Unendliche. Somit liegen zwischen den beiden Gangpolkurvenästen nur noch zwei Felder (in Bild 6.19 durch Schraffur hervorgehoben - vgl. auch die ikonische Darstellung C8 in Bild 6.17, S. 201) und nicht - wie im all-

gemeinen Fall (Bild 6.18, S. 205 - vgl. auch die ikonische Darstellung C7 in Bild 6.17, S. 201) - drei Felder.

Aus Bild 6.19 geht mit Hilfe des Kosinussatzes die Gleichung

$$l_2^2 = l_4^2 + (l_3 - l_1)^2 - 2 \cdot l_4 \cdot (l_3 - l_1) \cdot \cos(\varphi_\pi) \quad (6.12)$$

und dazu noch

$$\cos(\varphi) = \frac{l_1}{l_4} \quad (6.13)$$

hervor. Durch Einsetzen von Gleichung (6.13) in Gleichung (6.12) folgt unter Berücksichtigung von $\cos(\varphi_\pi) = \cos(180^\circ - \varphi)$ sowie $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos(\varphi)$

$$l_2^2 - l_3^2 = l_4^2 - l_1^2. \quad (6.14)$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß eine Kurbelschwinge A_0ABB_0 , deren Gangpolkurve zwei parallele Asymptoten¹⁾ aufweist (Bild 6.19), in zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle AB_0B$ und $\triangle A_0B_0A$ aufgeteilt werden kann, wenn Gleichung (6.14) mit Hilfe des Satzes von *PYTHAGORAS* geometrisch gedeutet wird:

$$l_2^2 - l_3^2 = \overline{B_0A}^2 \quad \text{und} \quad \overline{B_0A}^2 = l_4^2 - l_1^2.$$

Diese beiden rechtwinkligen Dreiecke sind nicht nur in der Viereckparallellage (Bild 6.19) sondern auch in der Kreuzparallellage (Bild 6.21, S. 209) einer Kurbelschwinge vorhanden, deren Gangpolkurve parallele Asymptoten aufweist. Aus Bild 6.21 geht für die Kreuzparallellage mit Hilfe des auf $\triangle A_0B_0A'$ angewandten Kosinussatzes die Gleichung

$$l_2^2 = l_4^2 + (l_3 + l_1)^2 - 2 \cdot l_4 \cdot (l_3 + l_1) \cdot \cos(\varphi) \quad (6.15)$$

hervor. Durch Einsetzen von Gleichung (6.13) in Gleichung (6.15) folgt - wie für die Viereckparallellage - Gleichung (6.14).

Wie aus Gleichung (6.14) und aus Bild 6.19 (S. 206) zu ersehen ist, müssen neben der Bedingung für eine allgemeine umlauffähige Kurbelschwinge

$$l_1 = l_{\min}$$

¹⁾ Beide Asymptoten der Gangpolkurve sind in dem geschilderten Fall aus folgendem Grund parallel zueinander: Der Momentanpol P_{20} der in Bild 6.19 dargestellten Kurbelschwinge liegt in der Viereckparallellage im Unendlichen, und zwar auf der rechts im Bild liegenden Asymptoten. Wird die Position des Getriebes so verändert, daß das Gelenk A in die am Gestell gespiegelte Lage A' wechselt (Bild 6.20), so bleiben die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle AB_0B$ und $\triangle A_0B_0A$ erhalten, weshalb die Glieder 1 und 3 auch in dieser Position (der Kreuzparallellage) parallel zueinander sind. Das bedeutet für den Momentanpol, daß er sich ebenfalls im Unendlichen befindet und zwar auf der Asymptoten, die zwischen Glied 1 und Glied 3 liegt und die auch in diesem Fall parallel zu Glied 3 ist. Da Glied 3 (im unveränderten Dreieck $\triangle AB_0B$) in beiden geschilderten Getriebepositionen die gleiche Lage relativ zu Glied 2 einnimmt, sind beide Asymptoten der Gangpolkurven des Getriebe in Bild 6.19 somit parallel.

für den in diesem Abschnitt geschilderten Grenzfall zusätzlich die Bedingungen

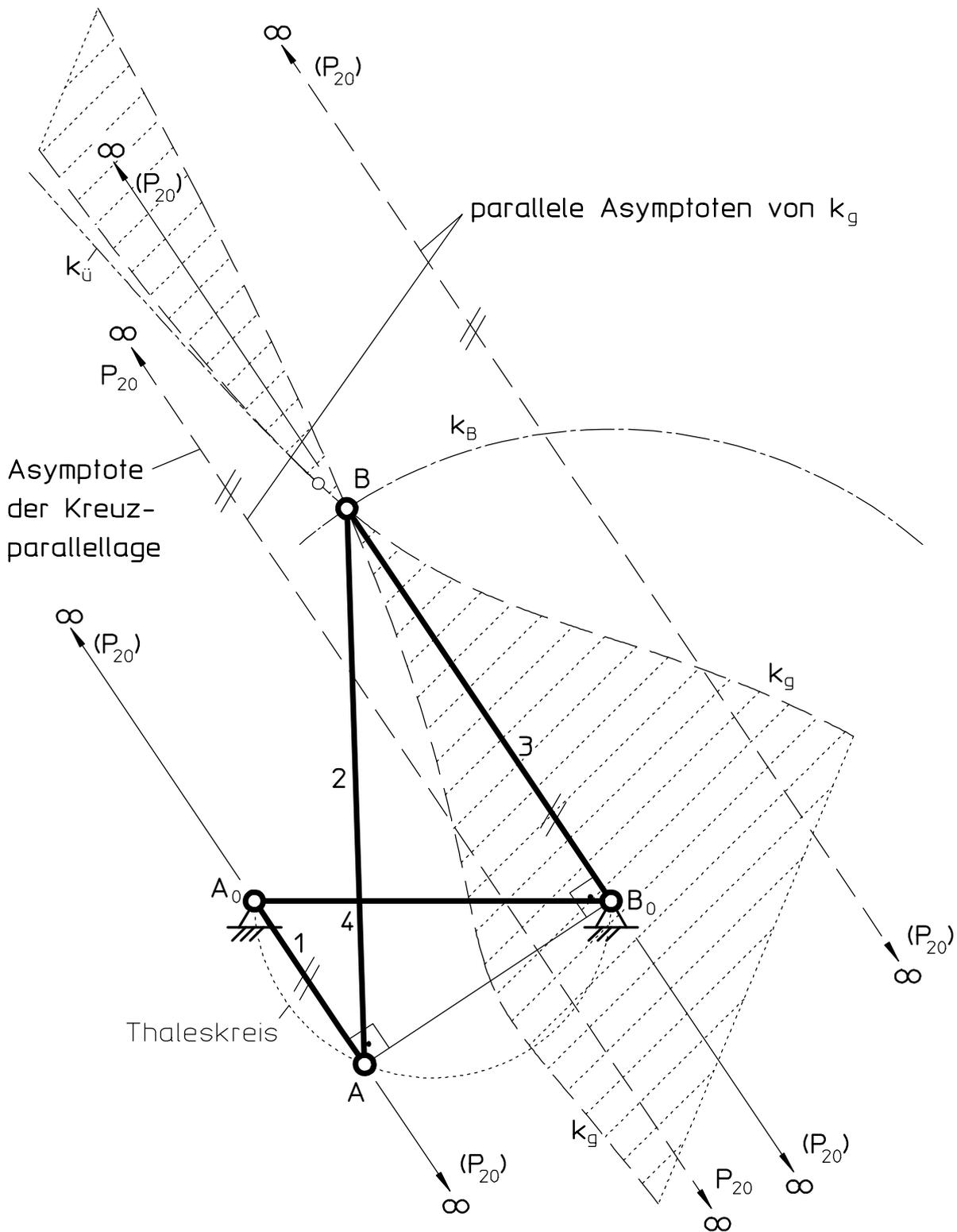


Bild 6.20: Getriebe aus Bild 6.19 in der Kreuzparallellage

$$l_3 < l_2 \quad (\text{und} \quad l_1 < l_4) \quad (6.16)$$

erfüllt sein. Die hier gewonnenen Erkenntnisse sind noch einmal in Tabelle 6.3 (auf Seite 228) zusammengefaßt.

Eine Kurbelschwinge mit parallelen Asymptoten der Gangpolkurve läßt sich nach Bild 6.19 (S. 206) folgendermaßen konstruieren:

- Vorzugeben sind z. B. die Längen der Glieder 1 und 4 sowie 2 oder 3, also l_1, l_4 sowie l_2 oder l_3 .
- Über Glied 4 ist der Thaleskreis zu errichten.
- Das Gelenk A liegt im Schnittpunkt des Thaleskreises mit einem Kreis vom Radius l_1 um den Punkt A_0 .

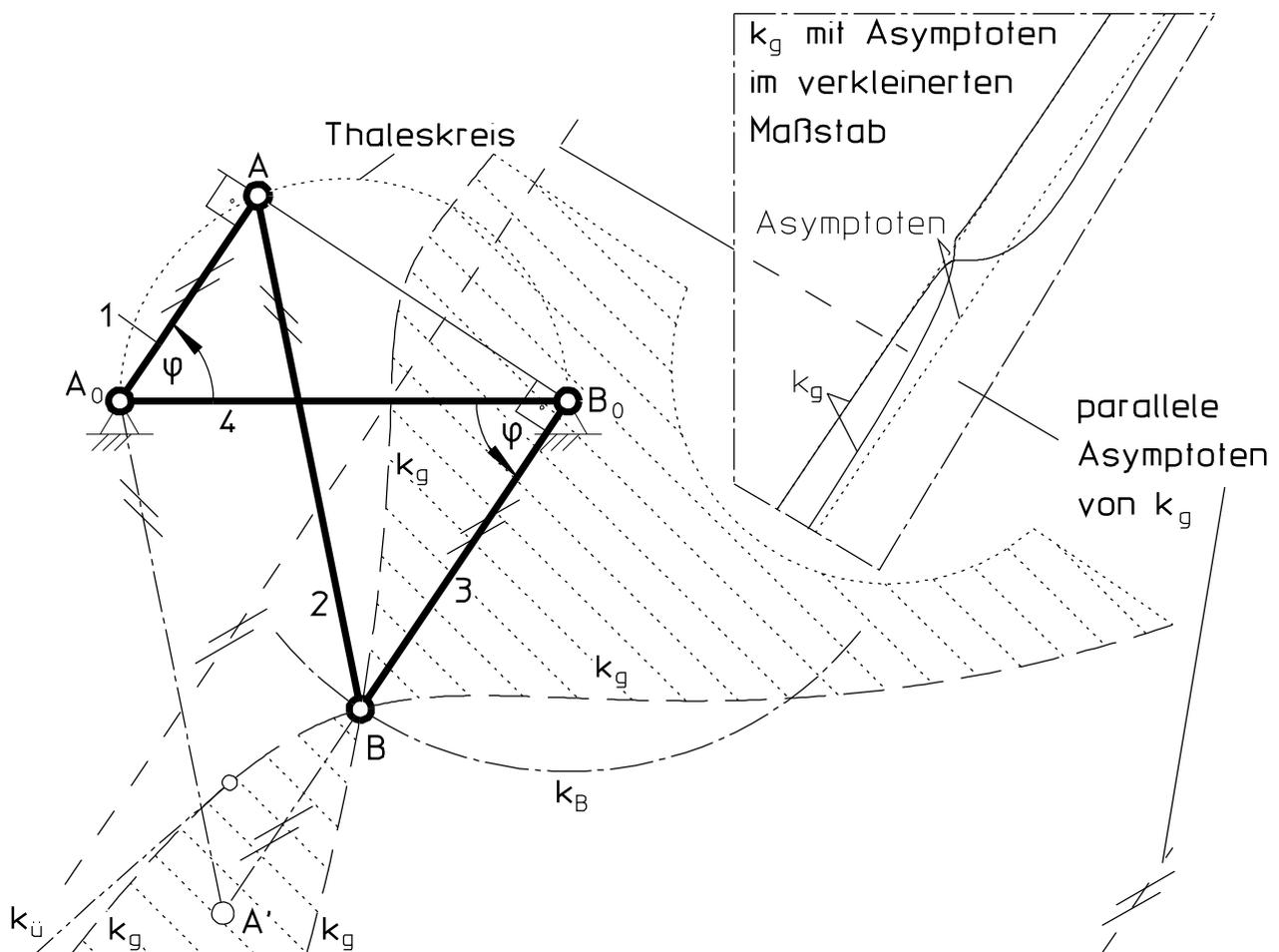


Bild 6.21: Konstruktion einer Kurbelschwinge in der Kreuzparallel-lage, deren Gangpolkurve k_g parallele Asymptoten aufweist

- Auf der Parallelen zur Strecke $\overline{A_0A}$ durch das Gelenk B_0 liegt der Punkt B . Sein Abstand zum Gelenk B_0 ist größer als l_1 ($\overline{A_0A}$) zu wählen.

Die Gangpolkurven von umlauffähigen Doppelkurbeln und umlauffähigen Doppelschwingen besitzen keine Asymptoten, da deren Koppeln umlaufen und die Gangpolkurven daher geschlossen sind [vgl. Tabelle 6.1 (S. 202/203) in Verbindung mit Bild 6.17 (S. 201) bzw. Bild 6.37 (S. 238)].

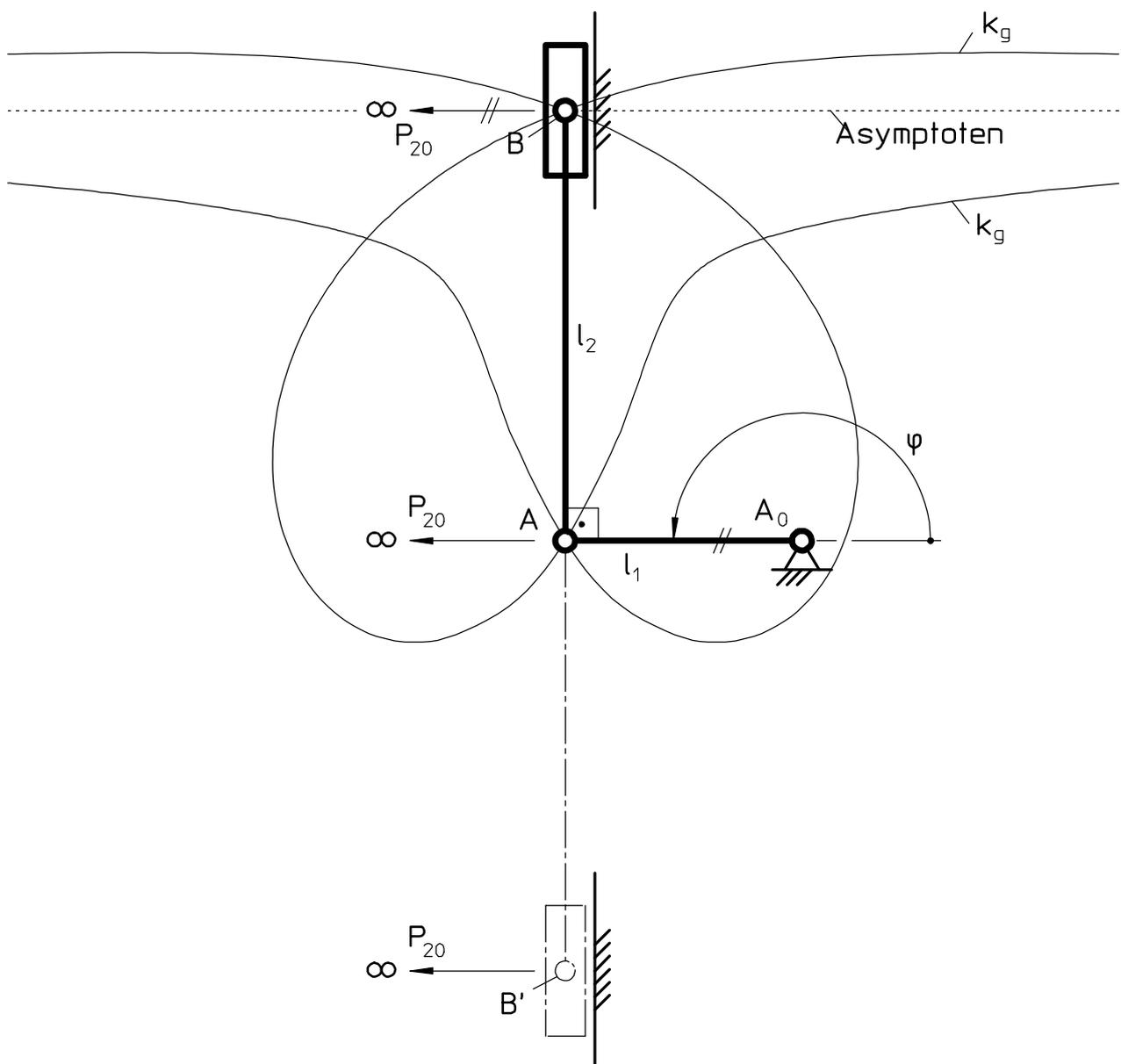


Bild 6.22: Die Gangpolkurve k_g einer totalschwingfähigen Schubswinge mit zwei parallelen identischen Asymptoten

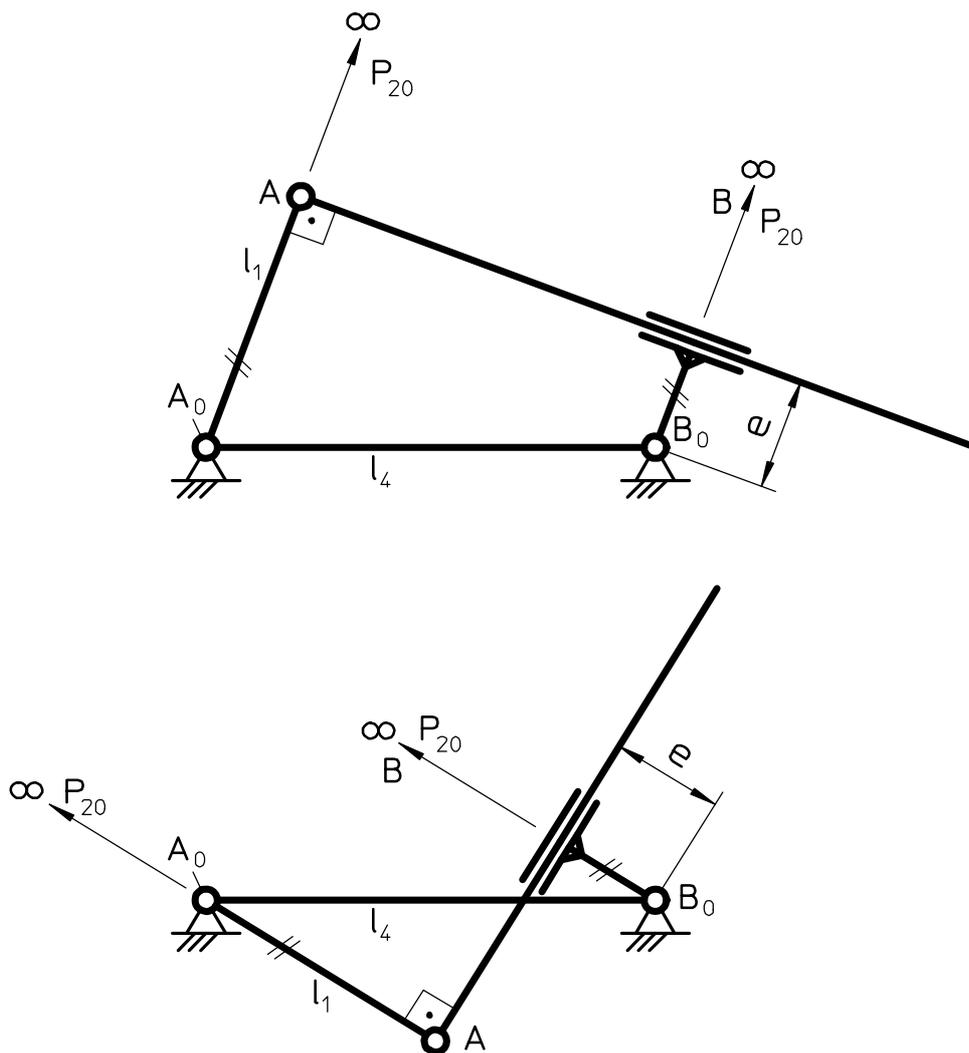


Bild 6.23: Eine Kurbelschleife mit schwingendem Schleifenglied in den Lagen, in denen der Momentanpol im Unendlichen liegt

Bei umlauffähigen Schubkurbeln (bzw. Schubschwingen) liegt der Momentanpol P_{20} immer auf der Senkrechten zur Schubrichtung durch den Gelenkpunkt B (vgl. Bild 6.22, das jedoch eine totalschwingfähige Schubschwinge darstellt). Der Momentanpol liegt also im Unendlichen, wenn die Kurbel senkrecht auf der Schubrichtung steht. Diese Konstellation wird zwar je Periode zweimal - bei $\varphi = 0^\circ$ und bei $\varphi = 180^\circ$ - durchlaufen. Da aber die Koppel in diesen Lagen nur bei totalschwingfähigen oder aber durchschlagfähigen Gelenkgetrieben den gleichen Winkel zur Schubrichtung aufweisen kann (vgl. Bild 6.22), sind die Asymptoten der Gangpolkurve von umlauffähigen Schubkurbeln nie parallel zueinander.

Der Momentanpol von umlauffähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied liegt auf der Senkrechten zur Schubrichtung des Schleifengliedes durch den Punkt B_0 (Bild 6.23). Da die Kurbel umläuft, wird sie auf jeden Fall je Periode zweimal parallel zur Senkrechten auf der Schubrichtung liegen, so daß alle Gangpolkurven von Kurbelschleifen

mit schwingendem Schleifenglied parallele Asymptoten aufweisen (Bild 6.23a). Der Verlauf dieser Gangpolkurven weist bei versetzten Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied nur einen einzigen Selbstschnittpunkt auf. Er ähnelt daher dem Verlauf von Gangpolkurven der in diesem Abschnitt beschriebenen Kurbelschwingen (vgl. Bild 6.19, S. 206) - und auch die ikonische Darstellung C8 in Bild 6.17, S. 201). Bei Gangpolkurven von zentrischen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied liegt der Selbstschnittpunkt im Unendlichen und die beiden Asymptoten der Gangpolkurve liegen übereinander (Bild 6.23a - vgl. die ikonische Darstellung C6 in Bild 6.17, S. 201). Die beiden Gangpolkurvenäste weisen somit keinen realen Selbstschnittpunkt auf.

Gangpolkurven von Kurbelschleifen mit umlaufenden Schleifenglied besitzen keine Asymptoten, da deren Koppeln umlaufen und die Gangpolkurven daher geschlossen sind.

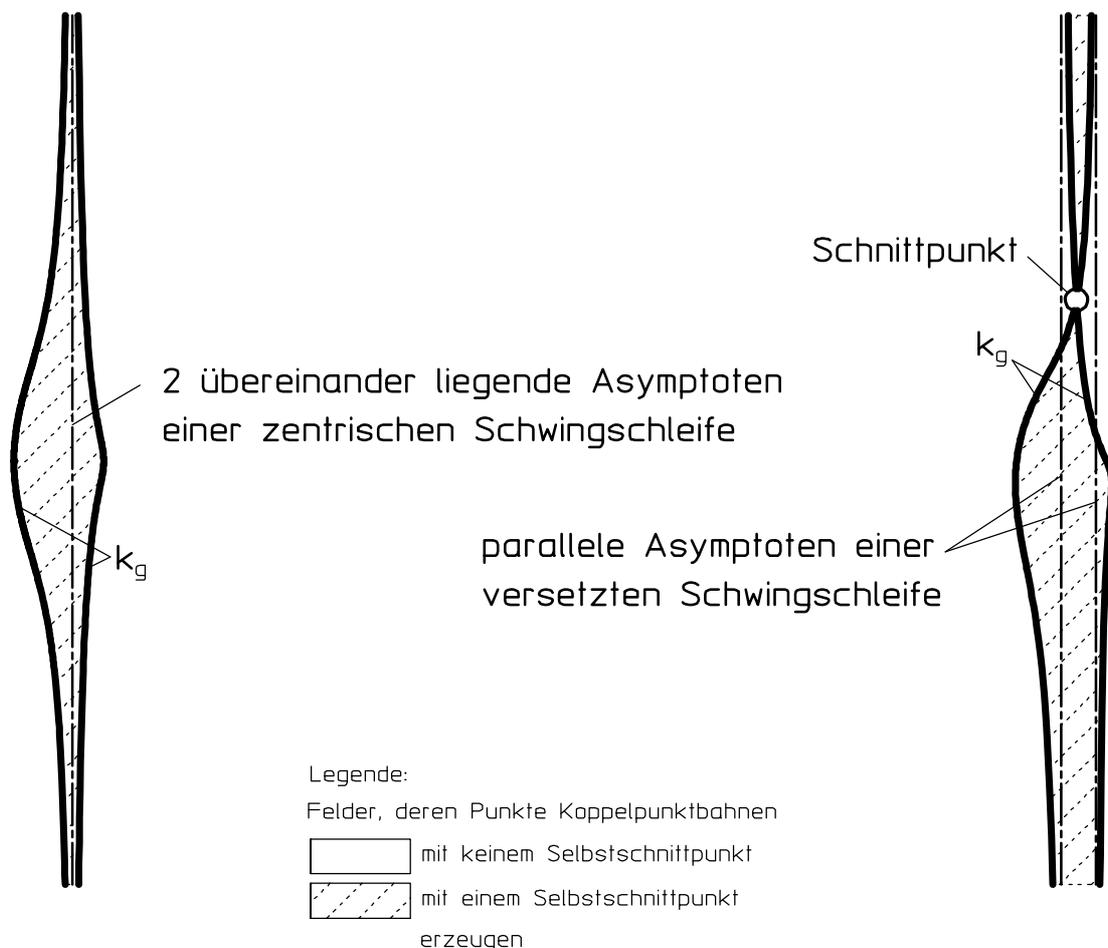


Bild 6.23a: Gangpolkurven k_g von zentrischen und versetzten Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied

6.6.2.1.2 Gangpolkurven umlauffähiger Gelenkgetriebe mit Selbstberührungspunkten

Wird das Gelenk B in Bild 6.18, S. 205, (vgl. auch die ikonische Darstellung $C7$ in Bild 6.17, S. 201) in den Schnittpunkt K von Kurbel $\overline{A_0A}$ und Schwinge $\overline{B_0B}$ gelegt (Bild 6.24 - vgl. auch die ikonische Darstellung $B7$ in Bild 6.17, S. 201), so entsteht eine Kurbelschwinge, die eine Gangpolkurve mit einem Selbstberührungspunkt besitzt. Aus Bild 6.24 geht direkt mit Hilfe des *Satzes von PYTHAGORAS* die Gleichung für die Bestimmung der Gliedabmessungen

$$\left(\overline{AB_0}^2 = \right) \quad \ell_4^2 - \ell_1^2 = \ell_3^2 - \ell_2^2 \quad (6.17)$$

hervor.

Erfüllen die Gliederabmessungen einer Kurbelschwinge Gleichung (6.17), verschwindet das Feld zwischen den beiden Gangpolkurvenästen (vgl. schraffierte Flächen in den Bildern 6.24 und 6.18, S. 205), zu dessen Grenzen die beiden Selbstschnittpunkte B und K der Gangpolkurve in Bild 6.18 gehören.

Wie aus Gleichung (6.17) und aus Bild 6.24 hervorgeht, müssen zusätzlich zu der Bedingung für eine allgemeine umlauffähige Kurbelschwinge

$$\ell_1 = \ell_{\min}$$

für eine Kurbelschwinge mit einem Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve die Bedingungen

$$\ell_2 < \ell_3 \quad (\text{und} \quad \ell_1 < \ell_4) \quad (6.18)$$

erfüllt sein. Der hier entwickelte Algorithmus ist noch einmal in Tabelle 6.2 (Seite 218) aufgeführt.

Eine Kurbelschwinge mit nur einem Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve läßt sich nach Bild 6.24 folgendermaßen konstruieren:

- Vorzugeben sind z. B. die Längen der Glieder 1 und 4 sowie 2 oder 3.
- Auf Glied 4 ist der Thaleskreis zu errichten.
- Das Gelenk A liegt im Schnittpunkt des Thaleskreises mit einem Kreis vom Radius ℓ_1 um den Punkt A_0 .
- Auf der Geraden $\overline{A_0A}$ liegt der Punkt B . Sein Abstand zum Gelenk A ist größer als der Abstand $\overline{A_0A}$ zu wählen.

sich immer in einem Doppelpunkt der Gangpolkurve - und gleichzeitig in dem Gelenk A (oder B), wenn sich die Glieder 1 und 2 (oder aber die Glieder 2 und 3) in der Streck- bzw. Decklage befinden. Diese Doppelpunkte sind im allgemeinen jeweils ein Selbstschnittpunkt, im Grenzfall jedoch ein Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve (Bild 6.25).

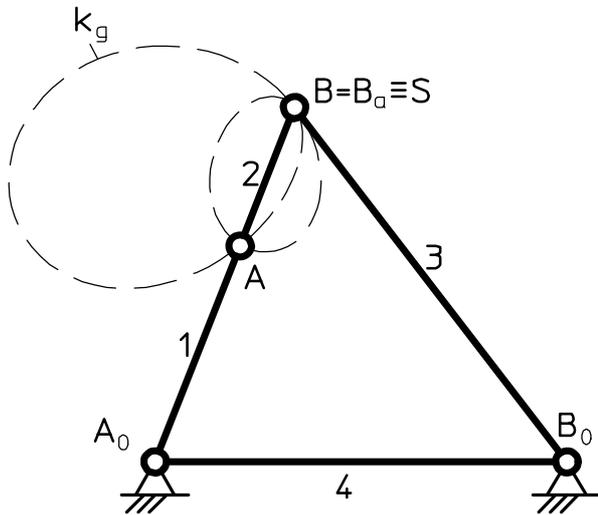


Bild 6.25: Die Gangpolkurve k_g einer umlauffähigen Doppelschwinge mit einem Selbstberührungspunkt S im Punkt B, der sich in der äußeren Totlage B_a befindetet.

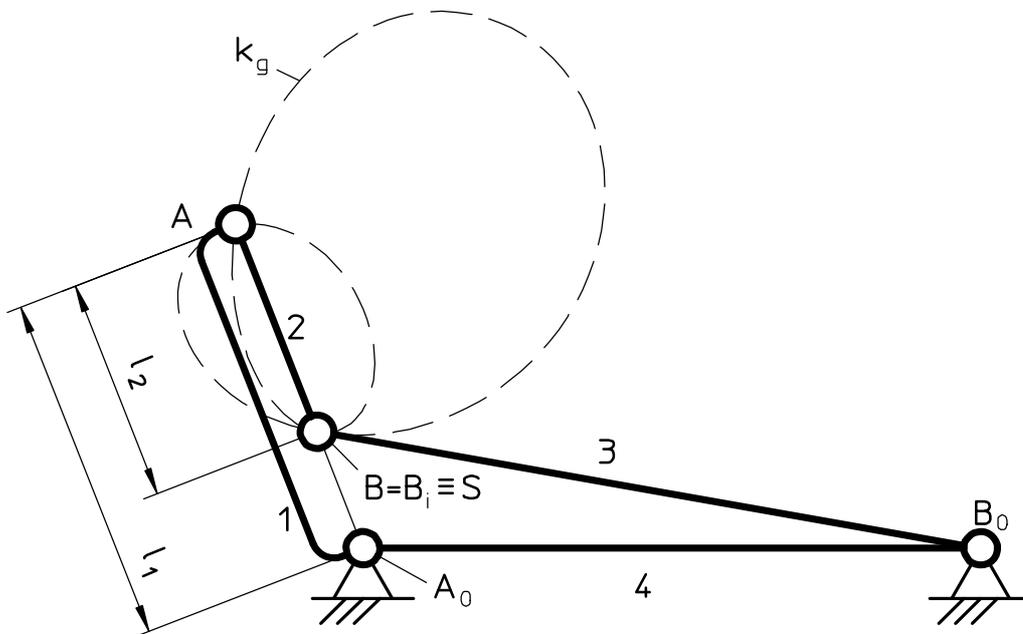


Bild 6.26: Die Gangpolkurve k_g einer umlauffähigen Doppelschwinge mit einem Selbstberührungspunkt S im Punkt B, der sich in der inneren Totlage B_i befindetet.

$$l_4 < l_3 \quad (\text{und } l_2 < l_1) \quad (6.20)$$

erfüllt sein müssen. Der hier entwickelte Algorithmus ist noch einmal in Tabelle 6.2 (S. 218) aufgeführt.

Soll der Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve im Gelenk A einer Doppelschwinge liegen, so sind gegenüber einem Getriebe nach Bild 6.27 die Glieder 1 und 3 zu tauschen. Aus Gleichung (6.19) folgt für eine Doppelschwinge mit einem Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve im Gelenk A durch Vertauschen der beiden Indizes 1 und 3

$$l_3^2 - l_2^2 = l_1^2 - l_4^2 . \quad (6.21)$$

Der gleiche Tausch der Indizes in Bedingung (6.20) ergibt für diesen Fall :

$$l_4 < l_1 \quad (\text{und } l_2 < l_3) . \quad (6.22)$$

Eine umlauffähige Doppelschwinge mit einem Selbstberührungspunkt der Gangpolkurve läßt sich nach Bild 6.27 folgendermaßen konstruieren:

- Vorzugeben sind z. B. die Längen der Glieder 3 und 4 sowie 2 oder 1.
- Auf Glied 3 ist der Thaleskreis zu errichten.
- Das Gelenk A_0 liegt im Schnittpunkt des Thaleskreises mit einem Kreis mit dem Radius l_4 um den Punkt B_0 .
- Auf der Senkrechten in B zur Geraden A_0B liegt der Punkt A. Sein Abstand zum Gelenk B ist kleiner als die Längen der Glieder 1 und 4 zu wählen.
- Zur Konstruktion des Selbstberührungspunktes in der Viereckparallellage ist das Gelenk A links von der Normalen auf dem Gestell 4 durch das Gelenk A_0 zu positionieren.

Umlauffähige zentrische Schubkurbeln weisen nach [6] immer Gangpolkurven mit einem Selbstberührungspunkt und zwei Asymptoten auf, die denen der in diesem Abschnitt beschriebenen Gangpolkurven der Kurbelschwingen (vgl. Bild 6.24, S. 214 - und auch die ikonische Darstellung B7 in Bild 6.17, S. 201, sowie Tabelle 6.1 auf S. 202/203) ähneln. Umlauffähige zentrische Schubschwingen besitzen nach [6] Gangpolkurven mit einem Selbstberührungspunkt und einem Selbstschnittpunkt und keine Asymptoten. Diese Gangpolkurven haben einen ähnlichen Verlauf wie die Gangpolkurven der in diesem Abschnitt beschriebenen Doppelschwingen (vgl. Bild 6.27, S. 216 - und auch die ikonische Darstellung B10 in Bild 6.17, S. 201).

Die Gangpolkurven von umlauffähigen Kurbelschleifen mit umlaufendem Schleifenglied sind geschlossen und haben keine Selbstschnittpunkte und keine Selbstberührungspunkte. Ihr Verlauf ist ähnlich dem Verlauf der Gangpolkurven von Doppelkurbeln (vgl. auch die ikonische Darstellung A9 in Bild 6.17, S. 201). Da Gangpolkurven von umlauffähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied nur einen Selbstschnittpunkt haben (siehe

Abschnitt 6.6.2.1.1), können bei ihnen auch keine Selbstberührungspunkte durch das Zusammenfallen zweier Selbstschnittpunkte gebildet werden, so daß es keine derartigen Kurbelschleifen gibt, die Gangpolkurven mit Selbstberührungspunkten besitzen.

Tabelle 6.2: Algorithmen zum Berechnen der Sonderabmessungen von Getrieben, die Gangpolkurven mit Selbstberührungspunkten erzeugen.

Getriebetyp	Algorithmus	
umlauffähige Kurbelschwinge	geg.: $l_1 = l_{\min}$	(Bedingung für umlauffähige Kurbelschwinge)
	l_2, l_3 mit $l_2 < l_3$	(6.18)
	ges.: $l_4 = \sqrt{l_3^2 - l_2^2 + l_1^2}$	(6.17)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} < l' + l''$	(Umlauffähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
umlauffähige Doppelschwinge	geg.: $l_2 = l_{\min}$	(Bedingung für umlauffähige Doppelschwinge)
	l_3, l_4 mit $l_4 < l_3$	(6.20)
	ges.: $l_1 = \sqrt{l_3^2 - l_4^2 + l_2^2}$	(6.19)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} < l' + l''$	(Umlauffähigkeitsbedingung nach GRASHOF)

6.6.2.2 Gangpolkurven totalschwingfähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten

Der Momentanpol P_{20} eines viergliedrigen Gelenkgetriebes liegt im Unendlichen, wenn die beiden im Gestell gelagerten Glieder zueinander parallel sind (Bild 6.28). Die Asymptote [z. B. $g_a(\mu_{||})$ der Getriebelage A_0ABB_0] ist deshalb in dieser Getriebestellung parallel zu den im Gestell gelagerten Gliedern. Da totalschwingfähige Gelenkgetriebe zu jeder Lage A_0ABB_0 eine am Gestell gespiegelte Lage $A_0A'B'B_0$ einnehmen können, durchlaufen die im Gestell gelagerten Glieder zwei Parallellagen. Sie besitzen somit immer zwei Asymptoten $g_a(\mu_{||})$ und $g_a(\mu_{||}')$, die einen Winkel von $\mu_{||}$ bzw. $\mu_{||}'$ zur Koppel aufweisen.

Die beiden Asymptoten sind dann parallel zu einander, wenn sie senkrecht auf der Koppel stehen, da sie in diesem Fall den gleichen Winkel $\mu_{||}$ (bzw. dessen Ergänzungswinkel) für

beide Parallellagen zur Koppel besitzen. Diese Konstellation ist für die Kreuzparallellage in Bild 6.29 dargestellt. Die beiden parallelen Asymptoten liegen in diesem Bild übereinander. Wie empirische Untersuchungen zeigen, ist das bei allen viergliedrigen totalschwingfähigen Gelenkgetrieben mit parallelen Asymptoten der Fall.

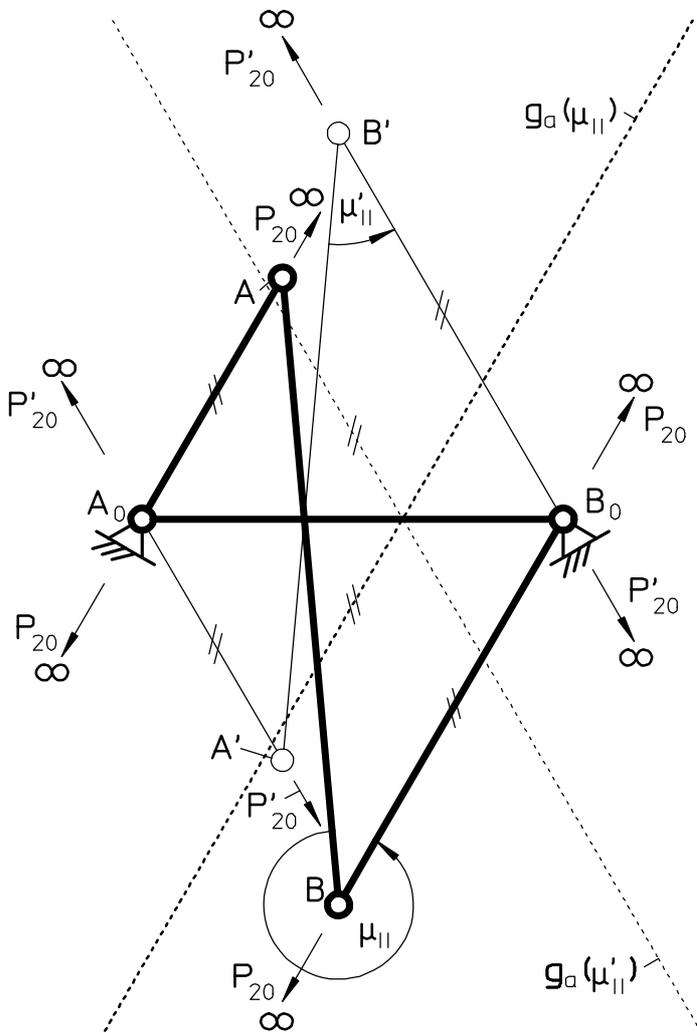


Bild 6.28: Die beiden Kreuzparallellagen und die beiden Asymptoten g_α der Gangpolkurven eines totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetriebes

Mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS folgt aus Bild 6.29

$$(l_3 + l_1)^2 + l_2^2 = l_4^2 . \tag{6.23}$$

Gleichung (6.23) kann nur erfüllt werden, wenn folgende Bedingungen gelten (vgl. Bild 6.29):

$$l_3 + l_1 < l_4 \text{ und} \tag{6.24}$$

$$l_4 = l_{\max} \cdot \quad (6.25)$$

Aus der zweiten Bedingung folgt, daß parallele Asymptoten in den Kreuzparallellagen der im Gestell gelagerten Glieder von totalschwingfähigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken nur bei Doppelinnenschwingen auftreten können (vgl. Tabelle 6.1, S. 202). Die hier gewonnenen Erkenntnisse sind noch einmal in Tabelle 6.3 (Seite 228) zusammengefaßt.

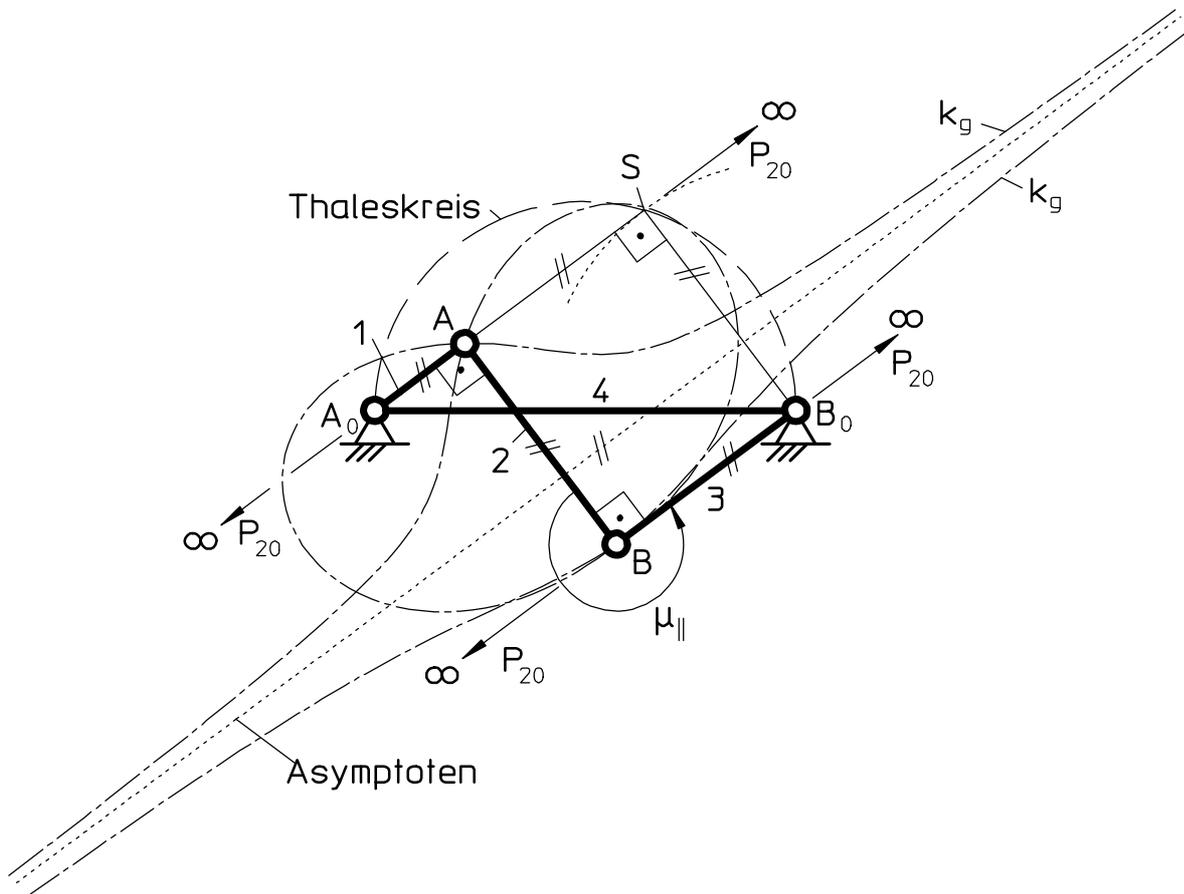


Bild 6.29: Eine Gangpolkurve k_g mit zwei parallelen identischen Asymptoten einer totalschwingfähigen Doppelinnenschwingung in der Kreuzparallellage

Eine totalschwingfähige Doppelschwingung mit parallelen Asymptoten der Gangpolkurve in der Kreuzparallellage läßt sich nach Bild 6.29 folgendermaßen konstruieren:

- Vorzugeben sind z. B. die Längen der Glieder 2 und 4 sowie 1.
- Über Glied 4 ist der Thaleskreis zu errichten.
- Das Gelenk A liegt auf einer Geraden zwischen dem Gelenk A_0 und dem Schnittpunkt S des Thaleskreises mit einem Kreis vom Radius l_2 um den Punkt B_0 . Die Lage des Gelenks A auf der beschriebenen Geraden ist zwischen dem Schnittpunkt S und dem

Gelenk A_0 frei wählbar. Es ist jedoch nach erfolgter Konstruktion zu prüfen, ob tatsächlich ein totalschwingfähiges Getriebe entstanden ist.

- Im Schnittpunkt der Senkrechten auf Glied 1 durch den Punkt A mit der Parallelen zu Glied 1 durch den Punkt B_0 liegt der Punkt B .

Gangpolkurven der totalschwingfähigen Doppelinnenschwinge mit parallelen Asymptoten in der Kreuzparallellage (vgl. Bild 6.29) weisen keine besonderen Merkmale auf, die eine gesonderte ikonische Darstellung rechtfertigen (vgl. Tabelle 6.1 auf S. 202/203 und die ikonischen Abbildungen C7 bis E7 in Bild 6.17, S. 201). Die sie erzeugenden Doppelinnenschwinge liegen aber in direkter Nachbarschaft zu Doppelinnenschwinge mit Gangpolkurven entsprechend den ikonischen Darstellungen C2 bis E2. Analoges gilt für die im folgenden behandelten Außen-Innenschwinge und Schubschwinge (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).

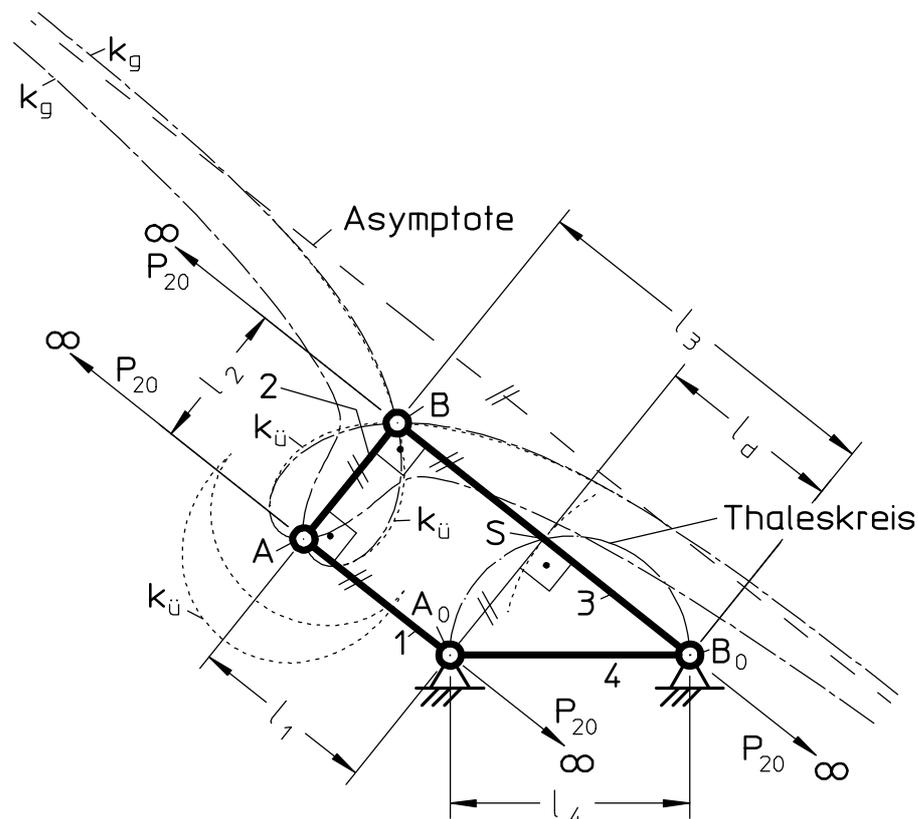


Bild 6.30: Eine Gangpolkurve k_g mit zwei parallelen identischen Asymptoten einer totalschwingfähigen Außen-Innenschwinge in der Viereckparallellage

Bild 6.30 zeigt ein totalschwingfähiges Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten in der Viereckparallellage. Aus diesem Bild folgt mit Hilfe des *Satzes von PYTHAGORAS*

$$(\ell_3 - \ell_1)^2 + \ell_2^2 = \ell_4^2. \quad (6.26)$$

Gleichung (6.26) kann nur erfüllt werden, wenn folgende Bedingungen gelten (vgl. Bild 6.30):

$$\ell_2 < \ell_4 \quad \text{und} \quad (6.27)$$

$$\ell_3 - \ell_1 < \ell_4. \quad (6.28)$$

Aus der ersten Bedingung folgt, daß parallele Asymptoten in den Viereckparallellagen der im Gestell gelagerten Glieder von totalschwingfähigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken bei Doppelaußenschwingen nicht auftreten können, da $\ell_2 \neq \ell_{\max}$.

Da parallele Asymptoten auch nicht in der Viereckparallellage von Doppelinnenschwingen vorkommen können²⁾, existieren sie nur bei totalschwingfähigen Außen-Innenschwingen (vgl. auch Tabelle 6.1, S. 202/203). Ein Algorithmus mit den hier gewonnenen Erkenntnissen ist in Tabelle 6.3 (auf Seite 228) aufgeführt.

Eine totalschwingfähige Doppelschwinge mit parallelen Asymptoten der Gangpolkurve in der Viereckparallellage läßt sich nach Bild 6.30 folgendermaßen konstruieren:

2) Die Totalschwingfähigkeitsbedingung nach *GRASHOF* lautet nach [42]

$$\ell_{\min} + \ell_{\max} > \ell' + \ell'' \quad (D1)$$

Es handelt sich um eine Doppelinnenschwinge, wenn

$$\ell_{\max} = \ell_4 \quad [42]. \quad (D2)$$

Aus Bild 6.30 folgt:

$$\ell_3 - \ell_1 = \sqrt{\ell_4^2 - \ell_2^2} \quad \text{und somit} \quad \ell_3 = \ell_1 + \sqrt{\ell_4^2 - \ell_2^2} \quad \text{bzw.} \quad \ell_3 = \ell_1 + \ell_d \quad (D3)$$

Das kürzeste Glied kann zwei verschiedene Lagen einnehmen:

1) benachbart mit dem Gestell:

$$\ell_{\min} = \ell_1. \quad (D4)$$

Mit $\ell' = \ell_2$ und $\ell'' = \ell_3$ folgt durch Einsetzen der Gleichungen (D2) bis (D4) in (D1)

$$\ell_1 + \ell_4 > \ell_2 + \ell_1 + \sqrt{\ell_4^2 - \ell_2^2}$$

und somit nach einigen Umformungen

$$(\ell_4 - \ell_2)^2 > \ell_4^2 - \ell_2^2.$$

Nach weiteren Umformungen erhält man

$$\ell_4 < \ell_2.$$

Da dieses Ergebnis im Widerspruch zu (D2) steht, kann eine Doppelinnenschwinge mit $\ell_{\min} = \ell_1$ keine Viereckparallellage einnehmen.

2) gegenüber dem Gestell:

$$\ell_{\min} = \ell_2. \quad (D5)$$

Aus dieser Bedingung ist herleitbar

$$\ell_1 = \ell_2 + x \quad (D6)$$

mit $x > 0$

$$(D7)$$

Mit $\ell' = \ell_1$ und $\ell'' = \ell_3$ folgt durch Einsetzen der Gleichungen (D2), (D3) und (D5) in (D1)

$$\ell_2 + \ell_4 > \ell_1 + \ell_1 + \ell_d.$$

Nach dem Einsetzen von (D6) folgt

$$\ell_2 + \ell_4 > 2\ell_2 + 2x + \ell_d.$$

Diese Ungleichung ist umformbar zu

$$x < (\ell_4 - \ell_2 - \ell_d)/2 \quad (D8)$$

Aus Bild 6.30 ist ersichtlich, daß der Term $(\ell_4 - \ell_2 - \ell_d)$ nie größer als Null sein kann, weshalb die Ungleichung (D8) der Ungleichung (D7) widerspricht. Deshalb kann eine Doppelinnenschwinge mit $\ell_{\min} = \ell_2$ keine Viereckparallellage einnehmen.

- Vorzugeben sind z. B. die Längen der Glieder 2 und 4 sowie 3.
- Über Glied 4 ist der Thaleskreis zu errichten.
- Das Gelenk B liegt auf der Verlängerung der Verbindungslinie zwischen dem Gelenk B_0 und dem Schnittpunkt S des Thaleskreises mit einem Kreis vom Radius l_2 um den Punkt A_0 über S hinaus. Die Lage des Gelenks B ist auf dieser Verlängerung der Verbindungslinie frei wählbar. Es ist jedoch nach erfolgter Konstruktion zu prüfen, ob tatsächlich ein totalschwingfähiges Getriebe entstanden ist.
- Im Schnittpunkt der Senkrechten auf Glied 3 durch den Punkt B mit der Parallelen zu Glied 3 durch den Punkt A_0 liegt der Punkt A .

Bei totalschwingfähigen Schubschwingen liegt der Momentanpol P_{20} immer auf der Senkrechten zur Schubrichtung durch den Gelenkpunkt B (vgl. Bild 6.22, S. 210). Der Momentanpol liegt also im Unendlichen, wenn die Schwinge senkrecht auf der Schubrichtung steht. Diese Konstellation wird je Periode zwei mal - in Bild 6.22 jeweils bei $\varphi = 180^\circ$ während des Hin- und des Rückschwingens - durchlaufen. Die Koppel weist in diesen Lagen nur dann den gleichen Winkel zur Schubrichtung auf, wenn sie senkrecht auf der Schwinge steht. Das ist der Fall, wenn

$$l_1 = e . \quad (6.29)$$

Aus dem Satz von GRASHOF für viergliedrige Gelenkgetriebe mit einem Schubgelenk

$$l_{\min} + e > l' \quad (6.30)$$

folgt durch Einsetzen von Gleichung (6.29) für totalschwingfähige Schubschwingen

$$l_2 < 2 \cdot l_1 \quad \text{für } l_{\min} = l_1 . \quad (6.31)$$

Alle totalschwingfähigen Schubschwingen mit $l_{\min} = l_2$ (sowie $l_1 = e$) weisen parallele Asymptoten auf, da für sie durch das Einsetzen von Gleichung (6.29) in die Ungleichung (6.30) folgt

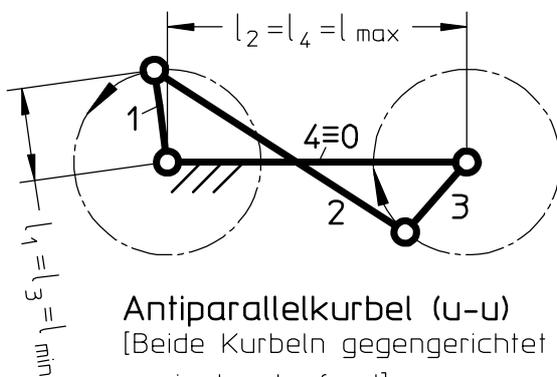
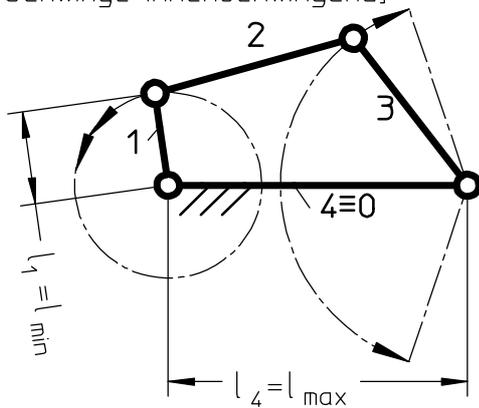
$$l_2 > 0 . \quad (6.32)$$

Die hier gewonnenen Erkenntnisse sind noch einmal in Tabelle 6.3 (auf Seite 228) aufgeführt.

Der Momentanpol P_{20} von totalschwingfähigen Schwingschleifen liegt auf der Senkrechten zur Schubrichtung des Schleifengliedes durch den Punkt B_0 (Bild 6.23, S. 211). Da die Schwinge je Periode zweimal parallel zur Senkrechten auf der Schubrichtung liegt, weisen alle Gangpolkurven von Schwingschleifen parallele Asymptoten auf (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).

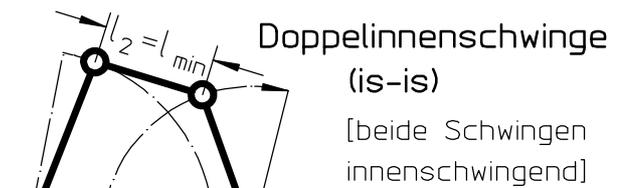
Kurbelinnenschwinge (2u-is)

[Kurbel zweimal umlaufend,
Schwinge innenschwingend]



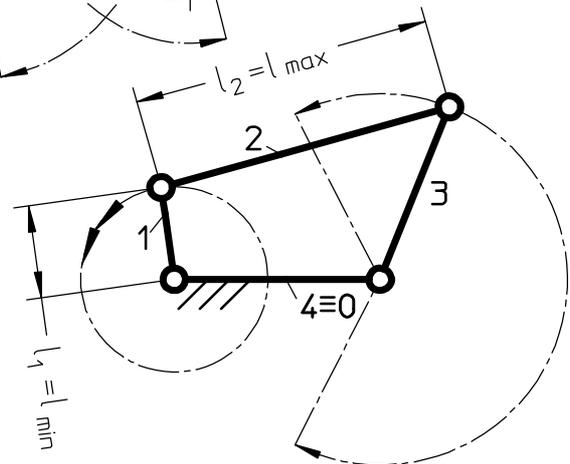
Antiparallelkurbel (u-u)

[Beide Kurbeln gegengerichtet
zweimal umlaufend]



Doppelinnenschwinge (is-is)

[beide Schwingen
innenschwingend]



Kurbelaußenschwinge (2u-as)

[Kurbel zweimal umlaufend,
Schwinge außenschwingend]

Bild 6.30a: Beispiele für durchschlagfähige Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken

6.6.2.3 Gangpolkurven durchschlagfähiger Gelenkgetriebe mit parallelen Asymptoten

Nur diejenigen durchschlagfähigen Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken, deren Koppeln schwingen, weisen Gangpolkurven mit Asymptoten auf. Nach [42] besitzen nur durchschlagfähige Kurbelaußenschwingen³⁾, Kurbelinnenschwingen und Antiparallelkurbeln diese Eigenschaft. Für die genannten Getriebeformen wird im folgenden geprüft, ob bei ihnen Gangpolkurven mit Asymptoten in der Viereck- oder in der Kreuzparallellage auftreten können.

³⁾ Da nicht für alle Getriebebauformen durchschlagfähiger Gelenkgetriebe (vgl. [42]) typspezifische Namen existieren, wird hier eine eindeutige Namengebung entsprechend Tabelle 6.1, S. 202/203 vorgeschlagen, die sich nach den Bewegungsmöglichkeiten der im Gestell gelagerten Glieder richtet (vgl. Bild 6.30a).

Die Verzweigungslagen viergliedriger durchschlagfähiger Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken stellen zwar ebenfalls Parallellagen der im Gestell gelagerten Glieder dar. Da in den Verzweigungslagen der Momentanpol im Endlichen liegt, kommen diese Lagen für Asymptoten jedoch nicht in Frage.

Asymptoten der Gangpolkurve treten in Parallellagen der im Gestell gelagerten Glieder nur auf, wenn die Gleichungen (6.14), (6.23) oder (6.26) erfüllt werden [vergleiche hierzu die diesen Gleichungen zugrundeliegenden Bilder 6.19 (S. 206), 6.21 (S. 209), 6.29 (S. 220) und 6.30 (S. 221)]. Wird in diese Gleichungen jeweils der Satz von GRASHOF für durchschlagfähige viergliedrige Gelenkgetriebe

$$l_{\min} + l_{\max} = l' + l'' \quad (6.33)$$

eingesetzt, so sind daraus die Gleichungen für durchschlagfähige Getriebe mit den gewünschten Eigenschaften herleitbar. Hierfür ist es allerdings notwendig, die Gliednummern des jeweils kürzesten und längsten Gliedes zu kennen:

- 1) Es handelt sich um durchschlagfähige Kurbelinnenschwingen (siehe Bild 6.30a), wenn

$$l_{\max} = l_4 \text{ und } l_{\min} = l_1 \text{ bzw.} \quad (6.34)$$

$$l_{\max} = l_4 \text{ und } l_{\min} = l_3 \text{ [42]}$$

- 2) oder wenn

$$l_{\min} = l_1 \text{ und } l_{\max} = l_3 \text{ bzw.} \quad (6.35)$$

$$l_{\min} = l_3 \text{ und } l_{\max} = l_1 \text{ [42].}$$

- 3) Es handelt sich um durchschlagfähige Kurbelaußenschwingen (siehe Bild 6.30a), wenn

$$l_{\max} = l_2 \text{ und } l_{\min} = l_1 \text{ bzw.} \quad (6.36)$$

$$l_{\max} = l_2 \text{ und } l_{\min} = l_3 \text{ [42].}$$

- 4) Es handelt sich um Antiparallelkurbeln (siehe Bild 6.30a), wenn

$$l_{\min} = l_1 = l_3 \text{ und } l_{\max} = l_2 = l_4 \text{ [42].} \quad (6.37)$$

Die Bedingung (6.25)

$$l_4 = l_{\max}$$

kann nur von der unter 1) aufgeführten Kurbelinnenschwinge und der Antiparallelkurbel erfüllt werden, weshalb parallele Asymptoten der Gangpolkurve in der Kreuzparallellage nach Gleichung (6.23) entsprechend Bild 6.29 (S. 220) nur bei Kurbelinnenschwingen auftreten können, da Antiparallelkurbeln die hierfür ebenfalls notwendige Bedingung (6.24)

$$l_3 + l_1 < l_4$$

nicht erfüllen.

Der *Satz von GRASHOF* [Gleichung (6.33)] für durchschlagfähige Kurbelinnenschwingen lautet unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.34)

$$l_4 + l_1 = l_2 + l_3 \quad \text{bzw.} \quad (6.38)$$

$$l_4 + l_3 = l_2 + l_1 . \quad (6.39)$$

Durch Umstellen von Gleichung (6.38) bzw. (6.39) nach l_4 und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (6.23) folgt nach wenigen Umformungen

$$l_3 = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_2 \pm 2 \cdot l_1} . \quad (6.40)$$

Wird das Pluszeichen im Nenner verwendet, ist l_3 größer als l_1 , beim Verwenden des Minuszeichens kleiner. Da alle Gliedlängen immer größer als Null sind, muß der Nenner von Gleichung (6.40) ebenfalls größer als Null sein. Da das Minuszeichen zum Errechnen der kleinstmöglichen Länge von l_1 verwendet werden muß, folgt als Bedingung für l_1 bzw. l_3 :

$$\min(l_1 ; l_3) < l_2 / 2 . \quad (6.41)$$

Die Gliedlänge l_4 kann nun mit Hilfe von Gleichung (6.38) bzw. (6.39) ermittelt werden. Es ist anschließend zu prüfen, ob es sich bei dem gefundenen Getriebe auch um eine Kurbelinnenschwinge handelt. Die hier gewonnenen Erkenntnisse sind noch einmal in Tabelle 6.3 (auf Seite 228) zu einem vereinfachten Algorithmus zusammengefaßt, für den festgelegt wurde, daß $l_1 = l_{\min}$ ist.

Die Bedingung (6.27)

$$l_2 < l_4$$

kann ebenfalls nur von Kurbelinnenschwingen erfüllt werden, weshalb parallele Asymptoten der Gangpolkurve in der Viereckparallellage nach Gleichung (6.26) entsprechend Bild 6.30 (S. 221) auch nur bei Kurbelinnenschwingen auftreten könnten. Der *Satz von GRASHOF* für die unter 1) (Seite 225) aufgeführten durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen (6.33) lautet unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.34)

$$l_4 + l_1 = l_2 + l_3 \quad \text{bzw.} \quad [\text{vgl. Gleichung (6.38)}]$$

$$l_4 + l_3 = l_2 + l_1 . \quad [\text{vgl. Gleichung (6.39)}]$$

Das Umstellen von Gleichungen (6.38) und (6.39) nach l_4 und Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (6.26) ergibt die Lösung $l_3 = l_1$, die nur von Antiparallel- und Parallelkurbeln und somit nicht von durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen erfüllt werden kann. Somit können zwei parallele Asymptoten in beiden Viereckparallellagen nicht bei durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen auftreten. Parallel- und Antiparallelkurbeln verletzen die Bedingung (6.27), weshalb das Auftreten von parallelen Asymptoten in zwei Viereckparallellagen bei ihnen ebenfalls nicht möglich ist.

Wird die aus den Bildern 6.19 (S. 206) und 6.21 (S. 209) entwickelte Gleichung (6.14) in alle möglichen Formen des *Satzes von Grashof* (6.33) für viergliedrige durchschlagfähige Gelenkgetriebe mit vier Drehgelenken eingesetzt, so folgt immer die Lösung $|\ell_3| = |\ell_1|$, die nur von Antiparallel- und Parallelkurbeln erfüllt werden kann. Da jedoch die Parallelkurbel nur die Viereckparallellage - diese allerdings in jeder Getriebebestellung - und die Antiparallelkurbel nur die Kreuzparallellage verwirklichen kann, können parallele Asymptoten in einer Kreuz- und in einer Viereckparallellage nur durch den Wechsel von der Antiparallelkurbel in die Parallelkurbel oder umgekehrt verwirklicht werden. Da in dieser Arbeit jedoch nur stetig oder hebbbar unstetig differenzierbare Bewegungen von Getrieben und somit nur durchschlagende durchschlagfähige Getriebe betrachtet werden, scheidet die Möglichkeit des Wechsels zwischen beiden Getriebeausprägungen aus.

Wird für die Herleitung von Gleichung (6.31) der *Satz von GRASHOF* für durchschlagfähige Gelenkgetriebe mit einem Schubgelenk

$$\ell_{\min} + e = \ell' \quad (6.42)$$

statt Gleichung (6.30) verwendet, so folgt für durchschlagfähige Schubkurbeln, daß deren Gangpolkurven parallele Asymptoten aufweisen, wenn

$$\ell_2 = 2 \cdot \ell_1 \quad \text{und} \quad (6.43)$$

$$\ell_1 = e \quad . \quad (\text{siehe Gleichung (6.29)})$$

(Der hier beschriebene Algorithmus ist noch einmal in Tabelle 6.3 aufgeführt)

Analog zu allen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied (siehe Abschnitte 6.6.2.1.1 und 6.6.2.2) besitzen auch alle durchschlagfähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied zwei parallele Asymptoten.

6.6.2.4 Gangpolkurven totalschwingfähiger und durchschlagfähiger Getriebe mit Dreifachpunkten

Das in Abschnitt 6.6.2.1 (S. 204) erwähnte Verfahren (Bild 6.18, S. 205) von HAIN [21] zum Bestimmen des Punktes einer Kurbelschwinge, dessen Bahn zwei Spitzen erzeugt, kann auch bei Doppelinnenschwingen angewendet werden (vgl. [16]), da bei diesen Getrieben die von den Schwingengelenken durchfahrenen Kreisbögen ebenfalls den Thaleskreis über dem Gestell schneiden. Da bei Doppelinnenschwingen beide Schwingengelenke für die Ermittlung eines solchen Punktes herangezogen werden können, existieren entsprechen Bild 6.30b, S. 229, Getriebe, die die von HAIN beschriebene Bedingung mit beiden Schwingen erfüllen. Ist das der Fall, erzeugt der Punkt K_T eine Bahn mit drei Spitzen [16, 45]. In der Konstellation zum Ermitteln des Punktes K_T liegen beide Schwingengelenke auf dem Thaleskreis, und somit müssen in dieser Konstellation die beiden Dreiecke $\triangle A_0BB_0$ und $\triangle A_0AB_0$ rechtwinklige Dreiecke sein. Da Punkte, die Bahnen mit

drei Spitzen erzeugen, im Dreifachpunkt der Gangpolkurve liegen, kann nun ein Algorithmus entwickelt werden, der es erlaubt, die Gliedabmessungen von Doppelinnenschwingen zu bestimmen, die eine Gangpolkurve mit einem Dreifachpunkt besitzen:

Tabelle 6.3: Algorithmen zum Berechnen der Sonderabmessungen von Getrieben, die Gangpolkurven mit parallelen Asymptoten erzeugen.

Getriebetyp	Algorithmus
umlauffähige Kurbelschwinge	geg.: $l_1 = l_{\min}$ (Bedingung für umlauffähige Kurbelschwinge)
	l_2, l_3 mit $l_3 < l_2$ (6.16)
	ges.: $l_4 = \sqrt{l_2^2 - l_3^2 + l_1^2}$ (6.14)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} < l' + l''$ (Umlauffähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
totalschwingfähige Außen-Innen-schwinge	geg.: l_1, l_3, l_4 mit $(l_3 - l_1) < l_4$ und (6.27)
	$l_3 = l_{\max}$ (Bedingung für Außen-Innenschwinge)
	ges.: $l_2 = \sqrt{l_4^2 - (l_3 - l_1)^2}$ (6.26)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} > l' + l''$ (Totalschwingfähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
totalschwingfähige Doppel-Innen-schwinge	geg.: $l_4 = l_{\max}$ (6.25)
	l_1, l_3 mit $(l_3 + l_1) < l_4$ (6.24)
	ges.: $l_2 = \sqrt{l_4^2 - (l_3 + l_1)^2}$ (6.23)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} > l' + l''$ (Totalschwingfähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
totalschwingfähige Schubschwinge	geg.: $l_2 = l_{\min}$ und l_1 sowie $e = l_1$ (6.29)
	oder aber $l_1 = l_{\min}, l_2$ mit $l_2 < 2 \cdot l_1$ sowie $e = l_1$ (6.29), (6.31)
	prüfen: $l_{\min} + e > l'$ (Totalschwingfähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
durchschlagfähige Kurbelinnen-schwinge	geg.: l_2 l_1 mit $l_1 < l_2/2$ (6.41)
	ges.: $l_3 = \frac{l_1 \cdot l_2}{l_2 - 2 \cdot l_1}$ (6.40)
	$l_4 = l_2 + l_1 - l_3$ (6.39)
durchschlagfähige Schubkurbel	geg.: l_1
	ges.: $l_2 = 2 \cdot l_1$ (6.43) $e = l_1$ (6.29)

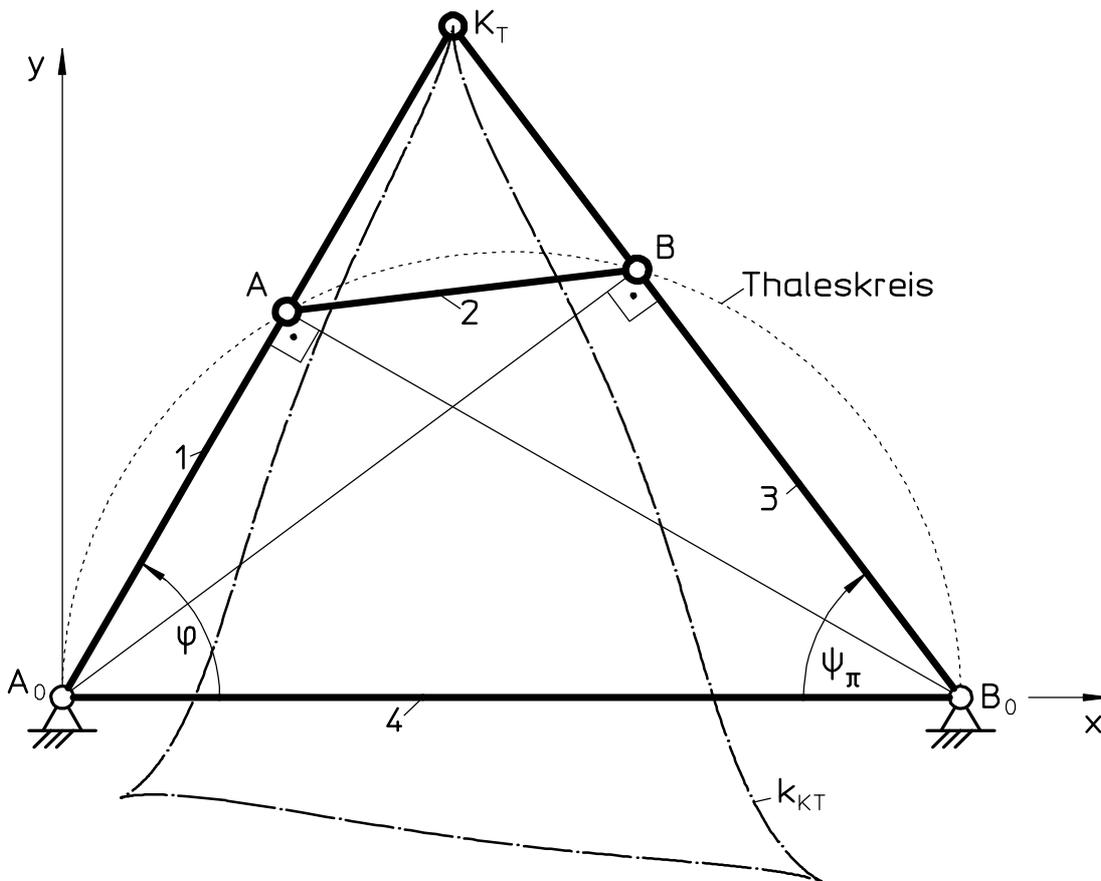


Bild 6.30b: Der Koppelpunkt K_T einer Doppelinnenschwinge, der eine Bahn k_{KT} mit drei Spitzen erzeugt

Aus Bild 6.30b lässt sich für Komponenten parallel zur x-Achse die Gleichung

$$l_{2x} = l_4 - l_1 \cdot \cos(\varphi) - l_3 \cdot \cos(\psi_\pi) \quad (6.44)$$

und für die Komponenten parallel zur y-Achse die Gleichung

$$l_{2y} = l_1 \cdot \sin(\varphi) - l_3 \cdot \sin(\psi_\pi) \quad (6.45)$$

aufstellen. Durch Quadrieren der Gleichungen (6.44) und (6.45) folgt

$$l_{2x}^2 = l_4^2 - 2l_1l_4 \cdot \cos(\varphi) - 2l_3l_4 \cdot \cos(\psi_\pi) + l_1^2 \cdot \cos^2(\varphi) + 2l_1l_3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi_\pi) + l_3^2 \cdot \cos^2(\psi_\pi) \quad (6.46)$$

sowie

$$l_{2y}^2 = l_1^2 \cdot \sin^2(\varphi) - 2l_1l_3 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi_\pi) + l_3^2 \cdot \sin^2(\psi_\pi) . \quad (6.47)$$

Durch Addieren der Gleichungen (6.46) und (6.47) folgt

$$\begin{aligned} l_2^2 = l_4^2 + l_1^2 + l_3^2 - 2 \cdot \{ l_1 l_4 \cdot \cos(\varphi) + l_3 l_4 \cdot \cos(\psi_\pi) + \\ - l_1 l_3 \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi_\pi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi_\pi)] \} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Mit Hilfe der aus Bild 6.30b ablesbaren Beziehungen

$$\cos(\varphi) = \frac{l_1}{l_4} \quad (6.49)$$

und

$$\cos(\psi_\pi) = \frac{l_3}{l_4} \quad (6.50)$$

folgt aus Gleichung (6.48)

$$l_2^2 = l_4^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2 \cdot l_1 l_3 \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi_\pi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi_\pi)] . \quad (6.51)$$

Aus Bild 6.30b lassen sich ebenfalls die Beziehungen

$$\sin(\varphi) = \left(\frac{\overline{AB_0}}{l_4} \right) = \frac{\sqrt{l_4^2 - l_1^2}}{l_4} \quad (6.52)$$

und

$$\sin(\psi_\pi) = \left(\frac{\overline{A_0B}}{l_4} \right) = \frac{\sqrt{l_4^2 - l_3^2}}{l_4} \quad (6.53)$$

herleiten. Durch Einsetzen der Gleichungen (6.52) und (6.53) in Gleichung (6.51) folgt

$$l_2 = \sqrt{l_4^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2 \cdot \frac{l_1 l_3}{l_4} \cdot \left[l_1 \cdot l_3 - \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right]} . \quad (6.54)$$

Sind die Gliedlängen des Gestells und beider Schwingen einer totalschwingfähigen Doppelinnenschwinne gegeben, so läßt sich mit Hilfe von Gleichung (6.54) die Koppellänge desjenigen Getriebes ermitteln, dessen Gangpolkurve zwei Dreifachpunkte (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203) aufweist. Auf jeden Fall ist zu prüfen, ob das gefundene Getriebe dem gewünschten Getriebetyp angehört. Die hier beschriebene Vorgehensweise ist noch einmal in Tabelle 6.4 (Seite 233) aufgeführt.

Geht in Bild 6.30b die Länge der Koppel gegen Null, so liegen die Gelenkpunkte A und B übereinander, und die Bedingung für das entstandene rechtwinklige Dreieck $\triangle A_0AB_0$ lautet

$$l_4^2 = l_1^2 + l_3^2 . \quad (6.55)$$

Da die Koppellänge immer eine positive Zahl sein muß, folgt aus Gleichung (6.55) als Voraussetzung für die Anwendbarkeit von Gleichung (6.54)

$$l_4 > \sqrt{l_1^2 + l_3^2} . \quad (6.56)$$

Die Gleichung (6.54) gilt nicht nur für totalschwingfähige, sondern auch für durchschlagfähige Doppelinnenschwingen. Soll eine durchschlagfähige Doppelinnenschwinge ermittelt werden, so muß in Gleichung (6.54) noch die Bedingung (6.33) für die Durchschlagfähigkeit berücksichtigt werden. Nach [42] gilt für durchschlagfähige Doppelinnenschwingen (mit Koppel 2 und Gestell 4, vgl. Bild 6.30a, S. 224)

$$l_{\min} = l_2 \quad \text{und} \quad (6.57)$$

$$l_{\max} = l_4 \quad . \quad (6.58)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.57) und (6.58) folgt aus dem Satz von GRASHOF (6.33) für durchschlagfähige Doppelinnenschwingen

$$l_4 + l_2 = l_1 + l_3 \quad . \quad (6.59)$$

Nach dem Umstellen von Gleichung (6.59) nach l_2 , Quadrieren des Ergebnisses und Gleichsetzen mit Gleichung (6.54) folgt nach einigen Umformungen

$$l_1^2 + l_3^2 - l_4 \cdot (l_3 + l_1) + l_1 l_3 = \frac{l_1 l_3}{l_4^2} \cdot \left(l_1 l_3 - \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right) \quad . \quad (6.60)$$

Der Versuch, diese Gleichung nach l_1 umzustellen, scheitert (ebenso wie das Umstellen nach l_3 oder l_4). Nach Umstellen auf

$$l_1^2 \cdot \left(1 - \frac{l_3^2}{l_4^2} \right) + l_1 \cdot \left(l_3 - l_4 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right) + l_3^2 - l_3 l_4 = 0 \quad (6.61)$$

hat sie die Form der gemischtquadratischen Gleichung

$$l_1 = -\frac{B/A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B/A}{2}\right)^2 - \frac{C}{A}} \quad [25] \quad (6.62)$$

mit

$$A = 1 - \frac{l_3^2}{l_4^2} \quad , \quad (6.63)$$

$$B = l_3 - l_4 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \quad \text{und} \quad (6.64)$$

$$C = l_3^2 - l_3 \cdot l_4 \quad \text{sowie} \quad (6.65)$$

$$l_3 < l_4 \quad .$$

[vgl. Gleichung (6.58)]

Diese konvergiert jedoch in der Regel sehr schnell zu einer Lösung, wenn Lösungen ausgeschlossen werden, die die Randbedingungen $l_1 > 0$, $l_3 < l_4$ [vgl. Gl. (6.58)] und $l_1 < \sqrt{l_4^2 - l_3^2}$ [vgl. Gl. (6.56)] verletzen. Mit Hilfe von Gleichung (6.59) ist anschließend

die Gliedlänge $l_2 = l_1 + l_3 - l_4$ zu ermitteln. Dieser Algorithmus ist noch einmal in Tabelle 6.4 (Seite 233) aufgeführt.

Gleichung (6.54) läßt sich auch auf durchschlagfähige Kurbelinnenschwingen anwenden, bei denen das Gestell das längste Glied ist [siehe Gleichung (6.34)]. Das kürzeste Glied muß in diesem Fall im Gestell gelagert sein, weshalb hier

$$l_{\min} = l_1 \quad \text{und} \quad (6.66)$$

$$l_{\max} = l_4 \quad \text{[vgl. Gl. (6.58)]}$$

gesetzt werden.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.58) und (6.66) folgt aus dem Satz von GRAS-HOF (6.33) für durchschlagfähige Doppelinnenschwingen (mit Schwingen 1 und 3 sowie Koppel 2, vgl. Bild 6.30a, S. 224)

$$l_4 + l_1 = l_2 + l_3 \quad . \quad (6.67)$$

Nach dem Umstellen von Gleichung (6.67) nach l_2 , Quadrieren des Ergebnisses und Gleichsetzen mit Gleichung (6.54) folgt nach einigen Umformungen

$$l_1^2 + l_3^2 + l_4 \cdot (l_1 - l_3) - l_1 l_3 = \frac{l_1 l_3}{l_4^2} \cdot \left(l_1 l_3 - \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right) \quad . \quad (6.68)$$

Da diese Gleichung nicht nach einer Gliedlänge aufzulösen ist, wird sie wieder so umgeformt, daß eine gemischtquadratische Gleichung entsprechend Gl. (6.62) entsteht:

$$l_1^2 \cdot \left(1 - \frac{l_3^2}{l_4^2} \right) + l_1 \cdot \left(l_4 - l_3 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right) + l_3^2 - l_3 l_4 = 0 \quad . \quad (6.69)$$

Die Substitutionen in Gl. (6.62) für A [Gl. (6.63)] und C [Gl. (6.65)] können für die Kurbelinnenschwinge übernommen werden. Der einzige Unterschied zur Lösung für die Doppelinnenschwinge ist die Substitution

$$B = l_4 - l_3 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \quad . \quad (6.70)$$

Die Randbedingungen $l_1 > 0$, $l_3 < l_4$ [vgl. Gl. (6.58)] und $l_1 < \sqrt{l_4^2 - l_3^2}$ [vgl. (6.56)] sind hier ebenfalls einzuhalten. Mit Hilfe von Gleichung (6.67) ist anschließend die Gliedlänge $l_2 = l_1 + l_4 - l_3$ zu ermitteln (vgl. auch Tabelle 6.4).

Tabelle 6.4: Algorithmen zum Berechnen der Sonderabmessungen von Getrieben, die Gangpolkurven mit Dreifachschrittpunkten erzeugen.

Getriebetyp	Algorithmus
totalschwingfähige Doppel- innenschwinge	geg.: l_1, l_3, l_4 mit $l_4 > \sqrt{l_1^2 + l_3^2}$ (6.56)
	ges.: $l_2 = \sqrt{l_4^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2 \cdot \frac{l_1 l_3}{l_4^2} \cdot \left[l_1 \cdot l_3 - \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)} \right]}$ (6.54)
	prüfen: $l_{\min} + l_{\max} > l' + l''$ (Totalschwingfähigkeitsbedingung nach GRASHOF)
durchschlagfähige Doppel- innenschwinge	geg.: l_1, l_3, l_4 mit $l_4 > \sqrt{l_1^2 + l_3^2}$ (6.56)
	ges.: Die konvergierende Lösung der Gleichung
	$l_1 = -\frac{B/A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B/A}{2}\right)^2 - \frac{C}{A}}$ mit (6.62)
	$A = 1 - \frac{l_3^2}{l_4^2}$, (6.63)
	$B = l_3 - l_4 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)}$ und (6.64)
	$C = l_3^2 - l_3 \cdot l_4$. (6.65)
	sowie $l_2 = l_1 + l_3 - l_4$
prüfen: $l_{\min} = l_2$ (6.57)	
durchschlagfähige Kurbel- innenschwinge	geg.: l_1, l_3, l_4 mit $l_4 > \sqrt{l_1^2 + l_3^2}$ (6.56)
	ges.: Die konvergierende Lösung der Gleichung
	$l_1 = -\frac{B/A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B/A}{2}\right)^2 - \frac{C}{A}}$ mit (6.62)
	$A = 1 - \frac{l_3^2}{l_4^2}$, (6.63)
	$B = l_4 - l_3 + \frac{l_3}{l_4^2} \cdot \sqrt{(l_4^2 - l_1^2) \cdot (l_4^2 - l_3^2)}$ und (6.70)
	$C = l_3^2 - l_3 \cdot l_4$. (6.65)
	sowie $l_2 = l_1 + l_4 - l_3$
prüfen: $l_{\min} = l_1$ (6.66)	
$l_{\max} = l_4$ (6.58)	

6.6.3 Systematik der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe der Gangpolkurve

Bild 6.17 (S. 201) zeigt eine systematische Übersicht aller in einer empirischen Untersuchung gefundenen Formen von Gangpolkurven sämtlicher viergliedriger Gelenkgetriebe (vgl. [42]) in der Form von ikonischen Darstellungen:

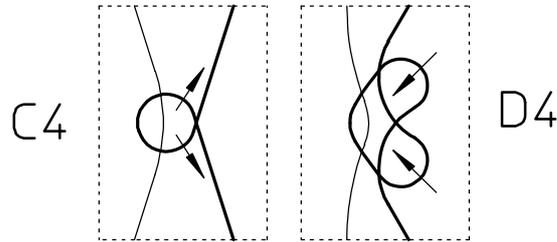
- In der ersten Zeile sowie in den beiden letzten Zeilen von Bild 6.17 (S. 201) sind geschlossene Gangpolkurven von gegenüber dem Gestell umlaufenden Koppeln abgebildet.
- Alle anderen Zeilen zeigen Gangpolkurven mit jeweils zwei (nicht eingezeichneten) Asymptoten von gegenüber dem Gestell schwingenden Koppeln.

Die Spalte A (ganz links) zeigt die typischen Verläufe der Gangpolkurvenäste in einer leicht erkennbaren „auseinandergezogenen“ Form: der Grundform. (Jede Grundform ist einmal mit durchgezogenen Linien dargestellt. Ist eine Grundform mehrmals aufgeführt, so sind die „Kopien“ gepunktet dargestellt.) Die Orientierung der Darstellungen ist willkürlich gewählt (vgl. in Spalte A besonders die Zeilen 5 und 6), so daß die bei viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben vorkommenden Variationen der Grundformen - die durch schraffierte Felder hervorgehoben sind (s. u.) - optisch vergleichbare Orientierungen der ikonischen Darstellungen aufweisen (vgl. z. B. Spalte C und die Ausführungen weiter unten). Bewirkt eine Variation der Grundformen ein qualitatives Verändern einer Grundform derart, daß bei Gangpolkurven mit zwei Ästen die Anzahl der Schnittpunkte eines Astes geändert wird, so wird die modifizierte Grundform in der leicht erkennbaren „auseinandergezogenen“ Form in Spalte H aufgeführt.

Die Variation der Grundform geschieht nach folgenden Regeln:

- Innerhalb jeder Zeile wird ein typischer Gangpolkurvenverlauf (siehe Spalte A) variiert. Dies geschieht durch Verschieben der beiden Gangpolkurvenäste - oder von Teilen der Gangpolkurve - zueinander derart, daß in Spalte B - wenn möglich - ein Berührungspunkt entsteht und in Spalte C eine Überlappung.
- Zwischen den Spalten C und D wird ein Teil der Gangpolkurve derart variiert, daß durch das Schiefstellen und Verlängern zweier „Schlingen“ (vgl. Bilder 6.31 und 6.32) nach rechts weitere Überlappungen von Teilen der Gangpolkurven hervorgerufen werden.
- Die ikonischen Darstellungen 4C und 7C müssen allerdings noch in eine andere Richtung variiert werden, um das Spektrum aller bei viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben auftretenden typischen Gangpolkurven - ausgehend von den durchgezogen dargestellten Grundformen in Spalte A - repräsentieren zu können. Aus diesem Grund werden bei diesen beiden ikonischen Darstellungen durch „Biegen“ der offenen Enden der Gangpolkurvenäste weitere Schnittpunkte erzeugt (vgl. Abbildung C3 mit C4 in Bild 6.17, S. 201, und Bild 6.33) oder ein Schnittpunkt (vgl. Abbildungen C5 mit C4 und C8

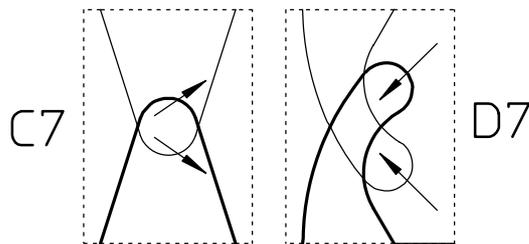
mit C7 in Bild 6.17 und Bild 6.34) bzw. zwei Schnittpunkte (vgl. Abbildung C6 mit C7 in Bild 6.17) entfernt.



Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.31: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C4 und D4

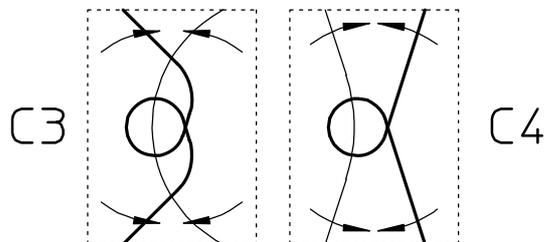
(Auszug aus Bild 6.17)



Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.32: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C7 und D7

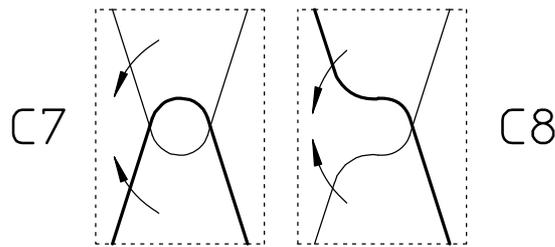
(Auszug aus Bild 6.17)



Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.33: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C3 und C4

(Auszug aus Bild 6.17)

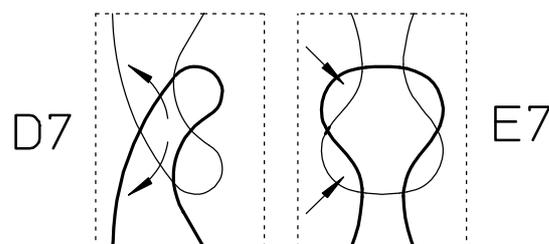


Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.34: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C7 und C8

(Auszug aus Bild 6.17)

- Zwischen den Spalten D und E wird (analog der Variation zwischen den Spalten C und D) ein weiterer Teil der Gangpolkurve derart variiert, daß durch das Schiefstellen und Verlängern zweier „Schlingen“ - diesmal nach links - zwei weitere Überlappungen von Teilen der Gangpolkurve entstehen (vgl. Bild 6.35)
- In der Spalte F (Bild 6.17, S. 201) wird die links von dieser Spalte aufgeführte ikonische Darstellung derart variiert, daß durch Verschieben von Teilen der Gangpolkurve in vertikaler Richtung aus zwei mal drei Selbstschnittpunkten zwei Dreifachpunkte entstehen.
- In Spalte G wird das Verschieben von Teilen der Gangpolkurve, das in Spalte F zu zwei Dreifachpunkten geführt hat, fortgesetzt, so daß aus den beiden Dreifachpunkten wieder zwei mal drei Selbstschnittpunkte werden.



Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

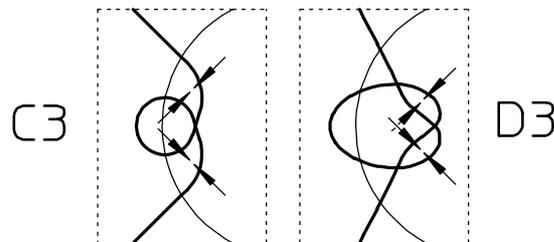
Bild 6.35: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ D7 und E7

(Auszug aus Bild 6.17)

Die schraffierten ikonischen Darstellungen in Bild 6.17 (S. 201) zeigen diejenigen typischen Verläufe bei der systematischen Variation der Gangpolkurve von viergliedrigen Gelenkgetrieben, die bei empirischen Untersuchungen tatsächlich gefunden wurden. An der Art der Schraffur ist ablesbar, wie viele Selbstschnittpunkte die Bahnen von Punkten der durch die Gangpolkurve erzeugten Felder aufwiesen, wenn keine Übergangskurven existieren würden.

- Punkte in Feldern ohne Schraffur erzeugen Bahnen ohne Selbstschnittpunkte.
- Die Einfachschraffung steht für einen Selbstschnittpunkt der Koppelpunktbahnen.
- In den durch zwei dicht nebeneinander liegenden Schraffurlinien gekennzeichneten Feldern liegen Punkte, deren Bahnen zwei Selbstschnittpunkte aufweisen.
- In den schwarz eingefärbten Feldern, die nur in der Spalte G erscheinen, liegen Punkte, deren Bahnen drei Selbstschnittpunkte aufweisen.

Entstehen bei der Variation des Verlaufs der Gangpolkurve neue Felder durch Überlap-
 pung zweier vorhandener Felder (vgl. Bild 6.36), so erhöht sich in dem neuen Feld die
 Anzahl der von dessen Punkten erzeugten Selbstschnittpunkte der Koppelpunktbahnen um
 1 gegenüber demjenigen der beiden „darunter liegenden“ Felder, das die größere Anzahl
 an Selbstschnittpunkten aufweist [vgl. Bild 6.17 (S. 201) Spalte C und D in Zeile 3].



Legende: Die Pfeile geben die Hauptrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.36: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C3 und D3

(Auszug aus Bild 6.17)

Für alle durchschlagfähigen Getriebe mit einer Verzweigungslage (Zeilen eins, drei bis fünf und auch neun in Bild 6.17, S. 201 - vgl. Tabelle 6.1 auf S. 202/203) kommt zu den durch die Feldeinteilung aufgrund der Gangpolkurve erklärten Selbstschnittpunkten noch der Sonderfall eines Selbstschnittpunktes - nämlich eines Doppelpunktes in der Verzweigungslage - hinzu. Die Anzahl n_S der Selbstschnittpunkte von Koppelpunktbahnen, die von Punkten eines Feldes erzeugt werden, kann also bei viergliedrigen Gelenkgetrieben - mit einer Ausnahme, nämlich der gleichschenkligen Schubkurbel als Ersatzgetriebe des Kardanräder-Getriebes - aufgesplittet werden in

$$n_S = n_{Sg} + 2 \cdot n_{Sü} + n_{Sd} \quad (6.71)$$

mit den Abkürzungen

n_{Sg} : Anzahl der durch die Gangpolkurve erklärten Selbstschnittpunkte
 (ablesbar an der Schraffur in Bild 6.17, S. 201 - s. o.)

$n_{Sü}$: Anzahl der Übergangskurvenäste, die die Anzahl der Selbstschnittpunkte
 eines Feldes beeinflussen (vgl. Abschnitt 6.6.4)

n_{sd} : Kennzahl für die Verzweigungslagen des Koppelgliedes

$n_{sd} = 0$, wenn keine Verzweigungslage existiert;

$n_{sd} = 1$ bei Getrieben mit einer Verzweigungslage und

$n_{sd} = 0$ bei Getrieben mit zwei Verzweigungslagen.

Bis auf die Antiparallelkurbel und die Parallelkurbel besitzen alle (umlauffähigen und durchschlagfähigen) Getriebe, deren beide im Gestell gelagerte Glieder während einer

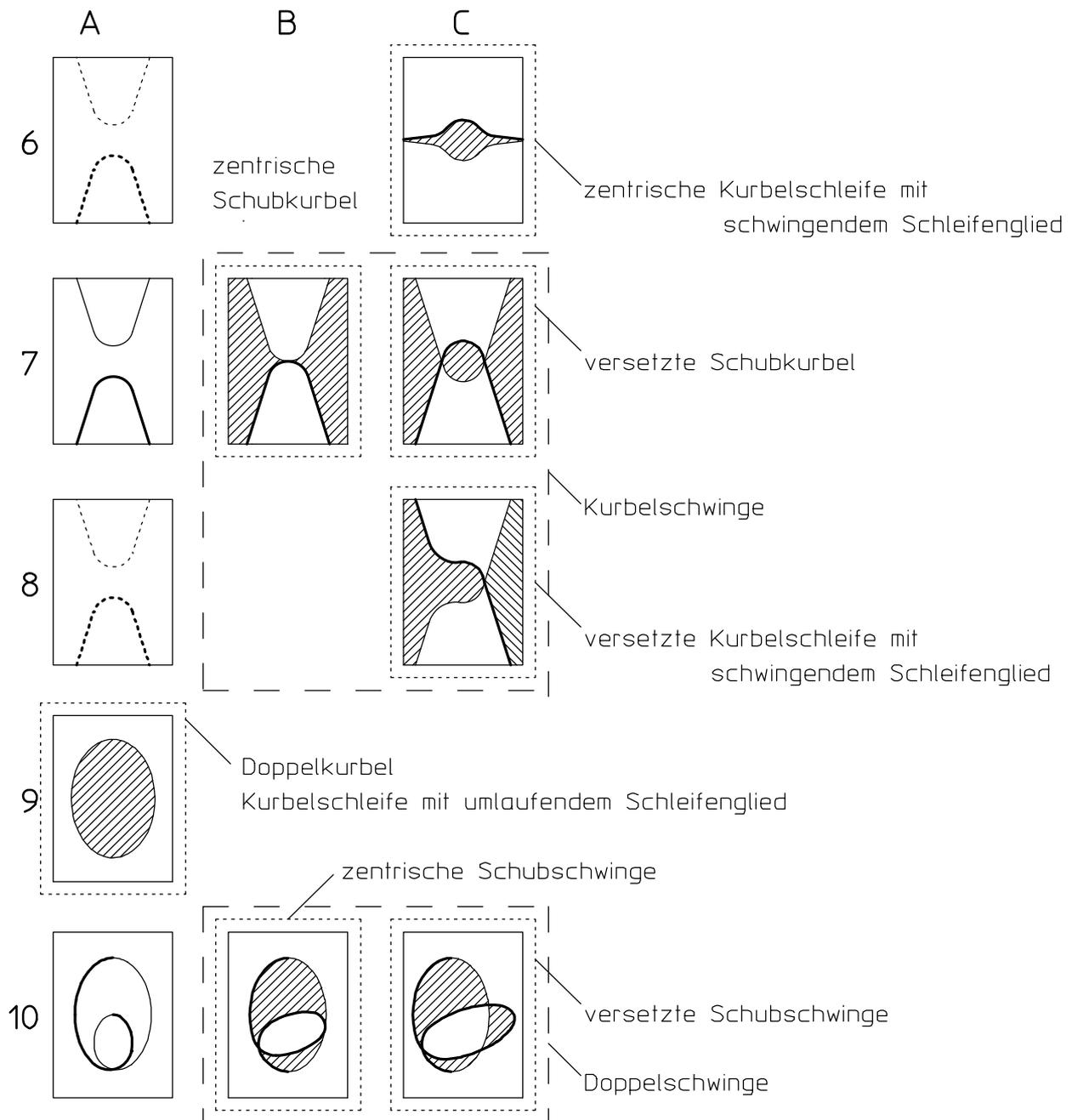


Bild 6.37: Die typischen Gangpolkurven der umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetriebe (Auszug aus Bild 6.17)

Periode einmal oder zweimal umlaufen, geschlossene Gangpolkurven ohne Selbstschnittpunkte [Bild 6.17 (S. 201), Zeile 9, vgl. Tabelle 6.1 auf S. 202/203].

Bild 6.37 zeigt auszugsweise die ikonischen Darstellungen der Gangpolkurven von umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben aus Bild 6.17:

- Zeile 9 zeigt die Gangpolkurven der Doppelkurbeln und der Kurbelschleifen mit umlaufendem Schleifenglied (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).
- In Spalte C der Zeile 10 ist der typische Verlauf der Gangpolkurve von Doppelschwingen und Schubschwingen dargestellt. Den Grenzfall, in dem zwei Selbstschnittpunkte der Gangpolkurve zu einem Berührungspunkt zusammenfallen zeigt Spalte B in Zeile 10 (vgl. Abschnitt 6.6.2.1.2 und Tabelle 6.1, S. 202/203).
- In Spalte C der Zeile 7 wird der typische Verlauf der Gangpolkurve von Kurbelschwingen und Schubkurbeln ikonisch dargestellt. Den einen Grenzfall, daß zwei Selbstschnittpunkte zu einem Selbstberührungspunkt zusammenfallen, zeigt die Abbildung in Spalte B der Zeile 7 (vgl. Abschnitt 6.6.2.1.2 und Tabelle 6.1, S. 202/203). Den anderen Grenzfall zeigt Spalte C in Zeile 8, der durch das Wandern des links liegenden Schnittpunkts „nach links ins Unendliche“ entsteht. Der Entstehungsmechanismus dieses Grenzfalls, bei dem die Gangpolkurven (in den Bildern 6.17, S. 201, und 6.37, S. 238, nicht eingezeichnete) parallele Asymptoten aufweisen (vgl. Abschnitt 6.6.2.1.1), wird in Bild 6.34 (S. 236) phänomenologisch erklärt. Zum einen tritt dieser Grenzfall bei Kurbelschwingen auf, zum anderen bilden alle Gangpolkurven von versetzten Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied diesen Grenzfall (Tabelle 6.1, S. 202/203). Bei zentrischen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied (Abschnitt 6.6.2.1.1) wandert zusätzlich der rechts liegende Schnittpunkt nach rechts ins Unendliche. Da kein Schnittpunkt der beiden Gangpolkurvenäste mehr existiert, entspricht das Ergebnis der Darstellung in Zeile 6 der Spalte C in Bild 6.37 (S. 238). (Die Enden der U-förmig dargestellten Gangpolkurvenäste sind so stark „aufgebogen“, daß sich beide rechts liegenden Enden nahezu am rechten Bildrand berühren - vgl. die in Bild 6.23a (S. 212) um 90° gedrehte Darstellung. Analog berühren sich die beiden links liegenden Enden beinahe am linken Bildrand.)

Alle in Bild 6.17 (S. 201) abgebildeten Gangpolkurven, die von totalschwingfähigen Getrieben erzeugt werden (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203), sind in Bild 6.38 noch einmal zusammengefaßt.

Wandert der Schnittpunkt des unteren Astes der Gangpolkurve in Spalte G der Zeile 2 (vgl. hierzu Spalte A der Zeile 2) weiter nach unten, so wechselt der Verlauf der Gangpolkurve von der ikonischen Darstellung in Spalte G zunächst in die der Spalte F, anschließend in die der Spalte E und zum Schluß - nachdem zwischendurch der Schnittpunkt bei parallelen Asymptoten im Unendlichen liegt (vgl. Abschnitt 6.6.2.2) - in die der Spalte E in der Zeile 7.

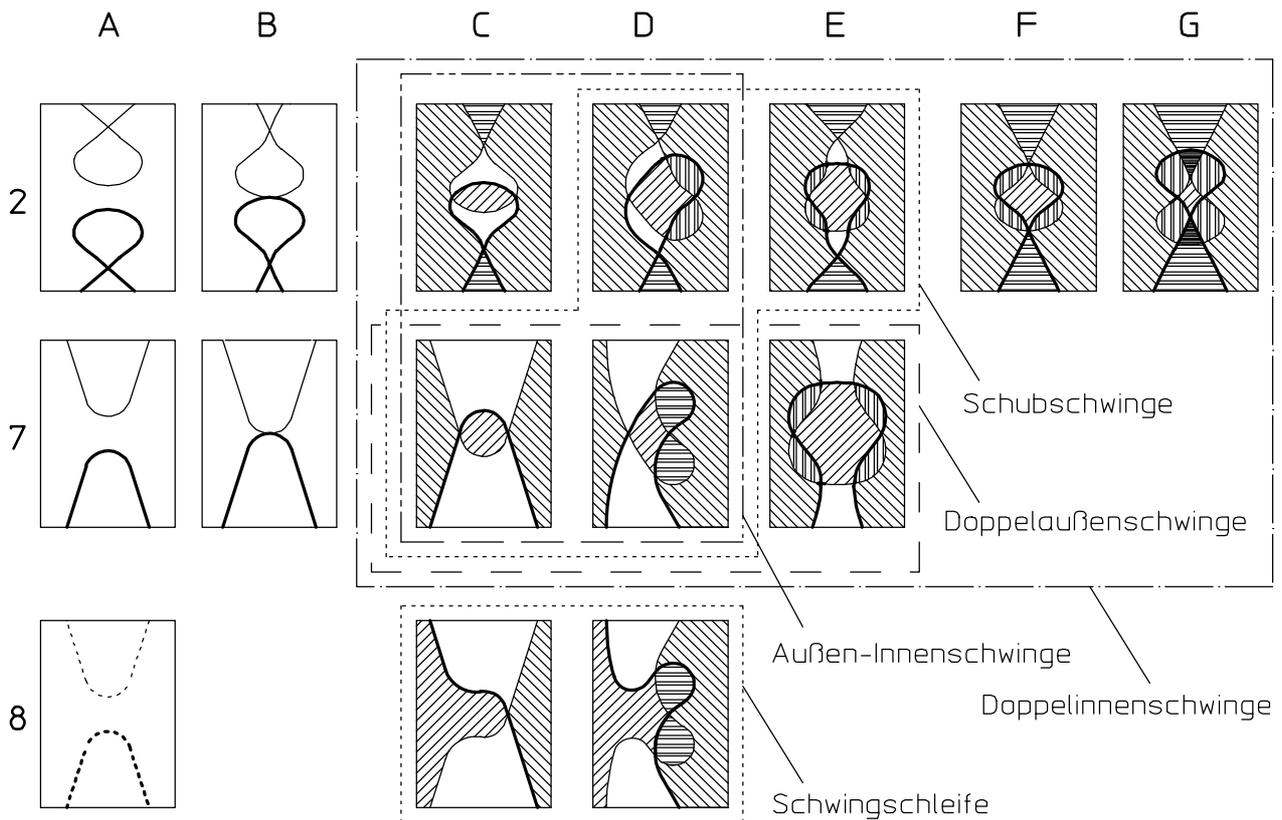
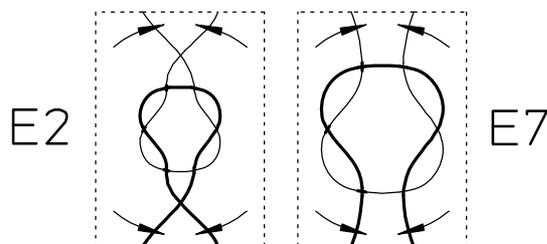


Bild 6.38: Die typischen Gangpolkurven der totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetriebe (Auszug aus Bild 6.17)



Legende: Die Pfeile geben die Hauptrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.39: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ E2 und E7 (Auszug aus Bild 6.17)

In Bild 6.39 wird das Entstehen und das Einnehmen eines immer größeren Platzes durch das Feld derjenigen Koppelpunkte, die Bahnen ohne Selbstschneidung erzeugen - und das somit in Bild 6.38 nicht schraffiert ist - phänomenologisch erklärt.

Den Grenzfall zwischen den in der jeweils gleichen Spalte dargestellten Gangpolkurven der Zeilen 2 und 7 (Bild 6.38) stellen Gangpolkurven mit (nicht eingezeichneten) parallelen Asymptoten dar:

- Da Doppelaußenschwingen keine Gangpolkurven mit parallelen Asymptoten besitzen (vgl. Abschnitt 6.6.2.2 und Tabelle 6.1, S. 202/203), können nur typische Verläufe einer Zeile - nämlich die der Zeile 7 - auftreten.
- Bei Doppelinnenschwingen können alle in den Zeilen 2 und 7 abgebildeten Gangpolkurvenverläufe auftreten (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Wie ein Verändern des Verlaufs von der Abbildung in Spalte C zur Abbildung in Spalte D und anschließend von der Abbildung in Spalte D zur Abbildung in Spalte E vonstatten geht, wird in den Bildern 6.32 (S. 235) und 6.35 (S. 236) gezeigt.
- Bei Außen-Innenschwingen werden die in den Spalten C und D der Zeilen 2 und 7 gezeigten Verläufe vorgefunden (Tabelle 6.1, S. 202/203).
- Bei totalschwingfähigen Schubschwingen werden ebenfalls die in den Spalten C und D der Zeile 7 gezeigten Verläufe vorgefunden. Von den in der Zeile 2 gezeigten Verläufen treten bei ihnen jedoch diejenigen der Spalten D und E auf (vgl. Tabelle 6.1, S. 202).
- Die Verläufe der Gangpolkurven von totalschwingfähigen Schwingschleifen gehen als Grenzfall aus zweien von den in Zeile 7 gezeigten Abbildungen hervor. Sie sind in den Spalten C und D der Zeile 8 dargestellt (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Der jeweils links in den Abbildungen der Zeile 7 liegende Gangpolkurvenschnittpunkt ist wegen der parallelen (in Bild 6.38, S. 240, nicht eingezeichneten) Asymptoten der Gangpolkurven von Schwingschleifen (vgl. Abschnitt 6.6.2.2) „ins Unendliche verschoben“ (vgl. hierzu auch Bild 6.34, S. 236)

Gangpolkurven von durchschlagfähigen und totalschwingfähigen Getrieben sind immer symmetrisch zur Koppelgeraden. In den ikonischen Darstellungen von Bild 6.17 (S. 201) liegen die Symmetrieachsen für diese Getriebe immer horizontal. Aus diesem Grund ist die Formenvielfalt bei der Variation der typischen Verläufe von durchschlag- und totalschwingfähigen Getrieben eingeschränkt.

Durchschlagfähige Gelenkgetriebe stellen Grenzfälle dar, und deshalb sind ihre Gangpolkurven {bis auf diejenigen der Getriebe mit mehr als einer Verzweigungslage (vgl. [42] und in Tabelle 6.1 [S. 202/203] die Spalte n_{sd}) und die geschlossenen Gangpolkurven ohne Selbstschnittpunkte} oberhalb derjenigen der totalschwingfähigen Getriebe (Zeile 1 in Bild 6.17, S. 201, bzw. in Bild 6.39a) und zwischen denen der totalschwingfähigen der Zeile 2 (sowie Zeilen 7 und 8) und denen der umlaufähigen Getriebe der Zeilen 6 bis 10 (also in den Zeilen 3 bis 5 in Bild 6.17) eingeordnet worden:

- Die Koppeln von durchschlagfähigen Doppelkurbeln und Kurbelschleifen mit zweimal umlaufendem Schleifenglied laufen relativ zum Gestell zweimal je Periode um. Ihre Gangpolkurven weisen keine Selbstschnittpunkte auf (vgl. Zeile 9 in Bild 6.39a sowie Tabelle 6.1 auf S. 202/203).

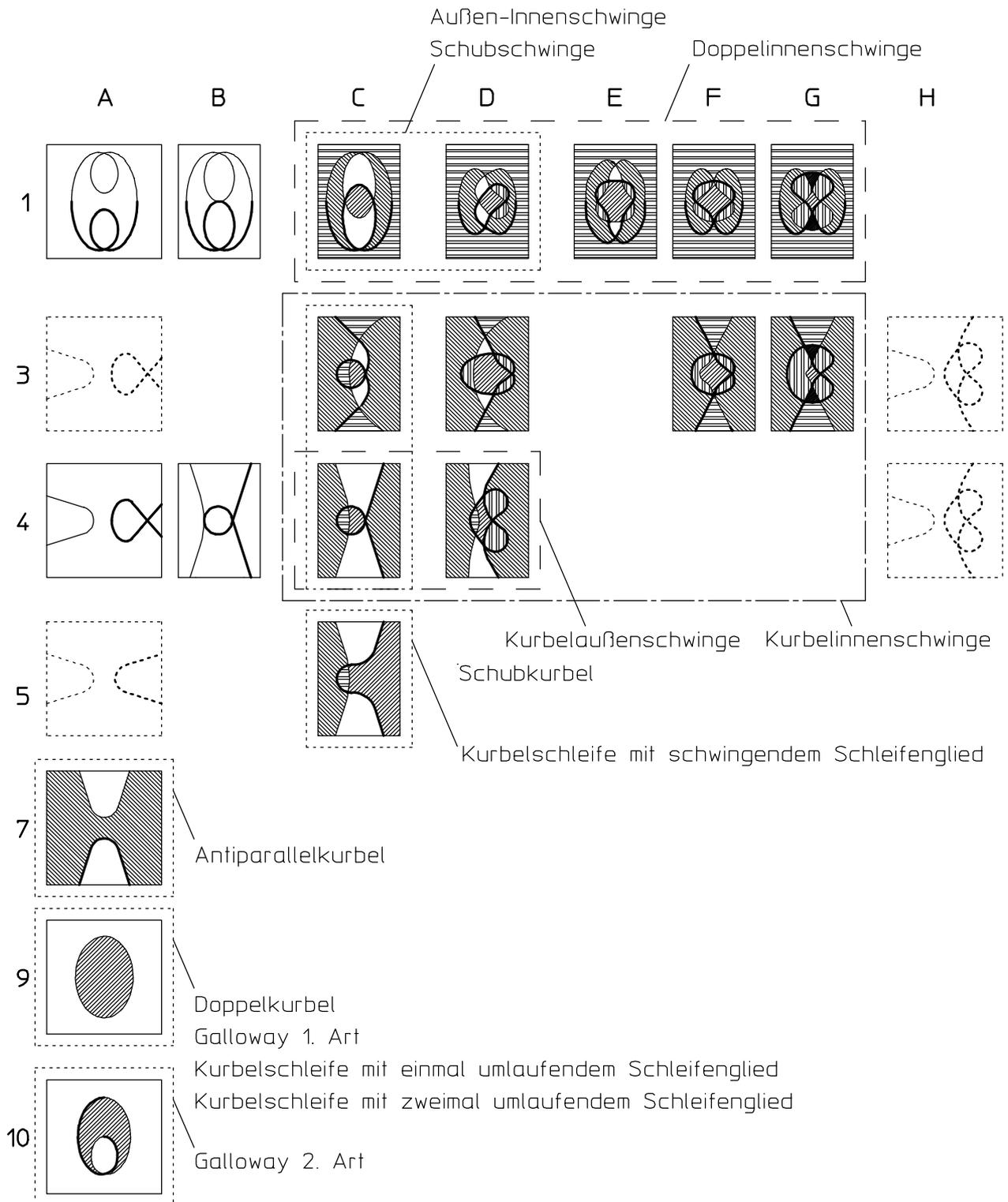
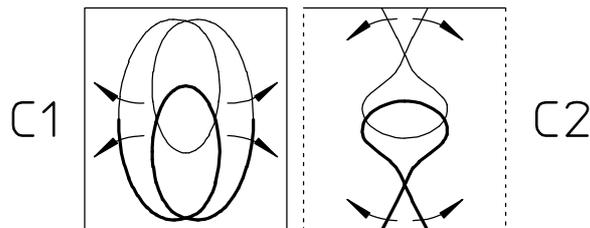


Bild 6.39a: Die typischen Verläufe der Gangpolkurven von durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben (Auszug aus Bild 6.17)

- Die typischen Verläufe der Gangpolkurven aller anderen durchschlagfähigen Getriebe, die eine Verzweigungslage besitzen und deren Koppeln ebenfalls zweimal je Periode

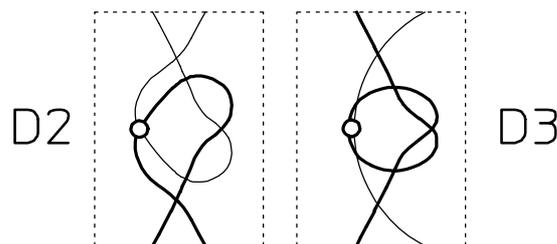
relativ zum Gestell umlaufen - dazu zählen die Außen-Innenschwingen, die Doppelinenschwingen und die Schubschwingen - sind in der ersten Zeile abgebildet (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Gangpolkurven, deren Verläufe den Abbildungen in Spalte E, F oder in Spalte G entsprechen, wurden allerdings nur bei Doppelinenschwingen beobachtet. Bild 6.40 zeigt, wie die Gangpolkurven von durchschlagfähigen Doppelschwingen und Schubschwingen der Zeile 1 in Gangpolkurven von totalschwingfähigen Doppel- und Schubschwingen der Zeile 2 (oder umgekehrt) übergehen können.



Legende: Die Pfeile geben die Haupttrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.40: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C1 und C2

(Auszug aus Bild 6.17)



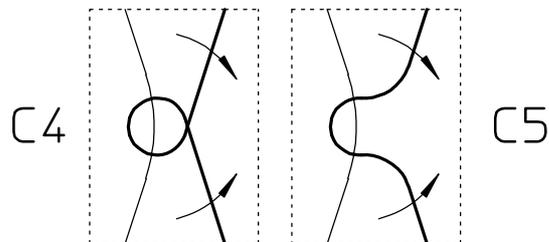
Legende: Der Kreis gibt die Stelle an, an der die Gangpolkurve aufgetrennt und neu zusammengesetzt wird.

Bild 6.41: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ D2 und D3

(Auszug aus Bild 6.17)

- Bild 6.41 zeigt, wie die Gangpolkurven von totalschwingfähigen Doppelschwingen der Zeile 2 in Gangpolkurven von durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen der Zeile 3 (oder umgekehrt) übergehen können. Die Gangpolkurven von durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen sind in den Zeilen 3 und 4 von Bild 6.39a (S. 242) dargestellt (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Der Wechsel von Zeile 3 nach Zeile 4 wird durch den Sonderfall hervorgerufen, daß die Gangpolkurven (nicht eingezeichnete) parallele Asymptoten aufweisen (vgl. Abschnitt 6.6.2.3). Den Wechsel zwischen den ikonischen Darstellungen C3 und D3 verdeutlicht Bild 6.36 (S. 237), den zwischen Zeile 3 und 4 Bild 6.33 (S. 235).

- Die Gangpolkurven von durchschlagfähigen Schubkurbeln sind denen der durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen ähnlich. Ihre ikonische Darstellungen entsprechen den Abbildungen C3 und C4 in Bild 6.39a, S. 242 (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).
- Die Gangpolkurven von durchschlagfähigen Kurbelaußenschwingen sind in der Zeile 4 abgebildet (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Wie ein Wechsel zwischen den ikonischen Darstellungen C4 und D4 zu erklären ist, zeigt Bild 6.31 (S. 235).
- Die Gangpolkurven von durchschlagfähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied bilden - wie die Gangpolkurven von totalschwingfähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied - einen Grenzfall, da sie immer zwei (nicht eingezeichnete) parallele Asymptoten aufweisen (vgl. Abschnitt 6.6.2.3). Sie sind (ohne Asymptoten) in Zeile 5 abgebildet und gehen aus der Darstellung in Zeile 4 durch das „Wandern des rechten Schnittpunkts nach rechts ins Unendliche“ hervor (vergleiche hierzu auch Bild 6.42 und Tabelle 6.1, S. 202/203).



Legende: Die Pfeile geben die Hauptrichtung für die Variation der Gangpolkurve an.

Bild 6.42: Phänomenologische Verwandtschaft der Gangpolkurven vom Typ C4 und C5
(Auszug aus Bild 6.17)

- Die ikonischen Darstellungen der Gangpolkurven von durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit zwei Verzweigungslagen (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203) sind in den Zeilen von Bild 6.17 (S. 201) zu finden, die auch Gangpolkurven der umlauffähigen Gelenkgetriebe enthalten:
- Die ikonische Darstellung der Gangpolkurve der Antiparallelkurbel (Bild 6.39a, S. 242) befindet sich (in Bild 6.17, S. 201) in der Spalte A der Zeile 7 neben den Gangpolkurven der umlauffähigen Schubkurbeln und Kurbelschwingen (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Es ist der einzige Verlauf einer Gangpolkurve von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben, bei dem die Gangpolkurve in zwei Äste zerfällt, die einander weder berühren noch schneiden.
- Die Koppeln des Gallowaygetriebes 1. Art [42] und die der durchschlagfähigen Kurbelschleife mit einmal umlaufendem Schleifenglied laufen relativ zum Gestell einmal um. Ihre Gangpolkurven besitzen keine Selbstschnitt- und keine Selbstberührungspunkte,

und ihre ikonische Darstellung ist in Zeile 9 von Bild 6.39a (S. 242) gezeigt (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).

Tabelle 6.5: Erkennungsmerkmale für die typischen Verläufe der Gangpolkurven

Kennzeichnung des typischen Verlaufs der Gangpolkurve	Anzahl Äste	Anzahl Schnittpunkte je Ast	Anzahl Schnittpunkte gesamt	Anzahl Berührungspunkte	Anzahl Dreifach-schnittpunkte	Anzahl Schnittpunkte der äußeren Feldbegrenzung	
C1	1	-	4				
D1			6				
E1			8				2
F1			2				2
G1			8				4
C2	2	1 / 1	4				
D2			6				
E2			8				8
F2			2				2
G2			8				6
C3	2	1 / 0	5				
D3	2	3 / 0	7			7	
F3			2			2	
G3			7			5	
C4	2	1 / 0	3				
D4	2	3 / 0	5				
C5	2	0 / 0	2				
A7	2	0 / 0	0	0			
B7			0	1			
C7			2				
D7			4				
E7			6				
C8	2	0 / 0	1				
D8			3				
A9	1	-	0				
A10	1	-	1	0			
B10			1	1			
C10			3				

- Die Koppel des Gallowaygetriebes 2. Art läuft ebenfalls relativ zum Gestell einmal um und ihre Gangpolkurve ist in der Spalte A der Zeile 10 der Bilder 6.17 (S. 201) und 6.39a (S. 242) neben den Gangpolkurven der umlauffähigen Doppelschwinge (Spalten B und C) zu finden (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203).
- Die Gangpolkurve einer gleichschenkligen Schubkurbel ist ein Kreis, der zweimal pro Periode durchlaufen wird. Die Bewegung der Koppel entspricht der des kleinen Kardanrades eines Kardanräderpaares und ist ebenfalls mit der Bewegung der Koppel des Doppelschiebers identisch. Am Ende von Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, daß bei der zweifach durchlaufenen Gangpolkurve der Kardan-Bewegung einer Ebene sich die Wirkungen der beiden Gangpolkurvenäste gegenseitig aufheben. Alle Punkte - diejenigen innerhalb und auch diejenigen außerhalb der Gangpolkurve - erzeugen somit Bahnen ohne Selbstschnittpunkte.
- Die Parallelkurbel besitzt keine Gangpolkurve, da sich ihr Momentanpol immer im Unendlichen befindet.

Die Zuordnung einer Gangpolkurve von viergliedrigen Gelenkgetrieben zu den typischen Verläufen in Bild 6.17 (S. 201) ist nicht immer so leicht möglich, wie das bei dem ersten Blick auf dieses Bild erscheinen mag (vgl. z. B. die Gangpolkurve vom Typ E7 in Bild 6.29, S. 220). Aus diesem Grund sind in Tabelle 6.5 (S. 245) Kriterien aufgeführt, die ein eindeutiges Zuordnen des typischen Verlaufs durch Abzählen (und somit auch durch Rechner) erlauben. Um einen schnellen Überblick über die signifikanten Kennzahlen des typischen Verlaufs einer Gangpolkurve in dieser Tabelle zu ermöglichen, sind statt einzeln auftretender Nullen leere Felder verwendet worden.

Die beiden Verläufe C5 und C7 bilden eine Ausnahme: Sie lassen sich anhand der in Tabelle 6.5 (S. 245) aufgeführten Kriterien nicht unterscheiden, da ihre Feldbegrenzungen die gleichen Merkmale aufweisen. Gangpolkurven vom Typ C5 sind allerdings nur bei durchschlagfähigen Kurbelschleifen mit schwingendem Schleifenglied zu finden (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203), während Gangpolkurven vom Typ C7 nie bei Kurbelschleifen anzutreffen sind.

6.6.3.1 Der Durchlaufsinne von Koppelpunktbahnen viergliedriger Gelenkgetriebe ohne Selbstschnittpunkte

Nur bei umlauffähigen und totalschwingfähigen Gelenkgetrieben sowie durchschlagfähigen Gelenkgetrieben mit zwei Verzweigungslagen gibt es jeweils maximal zwei Felder, die Punkte enthalten, deren Bahnen keine Selbstschnittpunkte aufweisen [vgl. Spalte C bis E und die Zeilen 7 bis 10 in den Bildern 6.17 (S. 201), 6.37 (S. 238), 6.38 (S. 240) und 6.39a (S. 242) in Verbindung mit Tabelle 6.1 (S. 202/203) und Gleichung (6.71)].

Die Bahnen der Punkte eines solchen Feldes besitzen (bei Getrieben mit vier Drehgelenken) immer den gleichen Durchlaufsinne (mathematisch positiv oder negativ). Sind zwei solcher Felder vorhanden, unterscheiden sich die Bahnen der Punkte unterschiedlicher Felder durch ihren Durchlaufsinne.

6.6.4 Systematik der Feldeinteilung der Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben beim Einbeziehen der Übergangskurve

In diesem Abschnitt soll die Formenvielfalt der Übergangskurven aufgezeigt werden. Trotz einer großen Anzahl an ikonischen Darstellungen von Übergangskurven in dieser Arbeit wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Statt dessen soll dieser Abschnitt dazu dienen, Hinweise darüber zu geben, wo von Übergangskurven und ggf. gleichzeitig von Gangpolkurven begrenzte Felder liegen. Kann wegen fehlender Rechnerprogramme zwar der Verlauf der Gangpolkurve, nicht aber der Verlauf der Übergangskurve ermittelt werden, so ist es aufgrund der hier gezeigten Abbildungen und durch das Ermitteln einiger Verläufe von Koppelpunktbahnen möglich, abzuschätzen, wo Punkte liegen, die Bahnen mit einer vorgegebenen Anzahl an Selbstschnittpunkten erzeugen.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß in einem Berührungspunkt von Gangpolkurve und Übergangskurve beide Kurven die gleiche Tangente besitzen, wenn der Selbstberührungspunkt (als Punkt der Übergangskurve) und der Momentanpol (als Punkt der Gangpolkurve) zur gleichen Getriebestellung gehören (vgl. Kapitel 3.2). Ein Berührungspunkt stellt nie einen Endpunkt der Übergangskurve dar. Wird die Übergangskurve nicht auf der anderen Seite des Berührungspunktes fortgesetzt (was in der Regel bei viergliedrigen Gelenkgetrieben der Fall ist), so handelt es sich um eine Spitze einer Übergangskurve (vgl. Bild 3.9, S. 51), die während einer Periode in beide Richtungen (hin und zurück) durchlaufen wird.

6.6.4.1 Die Übergangskurven von umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben

Bild 6.43 zeigt zwölf verschiedene ikonische Darstellungen der Übergangskurven und Gangpolkurven der umlauffähigen Kurbelschwinge. Im allgemeinen liegen die Übergangskurven etwas näher an der Gangpolkurve als in den ikonischen Darstellungen. Für Bild 6.43-A trifft diese Aussage allerdings nicht zu, weshalb das dort abgebildete Feld zwischen Übergangskurve und Gangpolkurve das in der Literatur mit anderen Verfahren am häufigsten erkannte Feld ist (vgl. [8] und [9]).

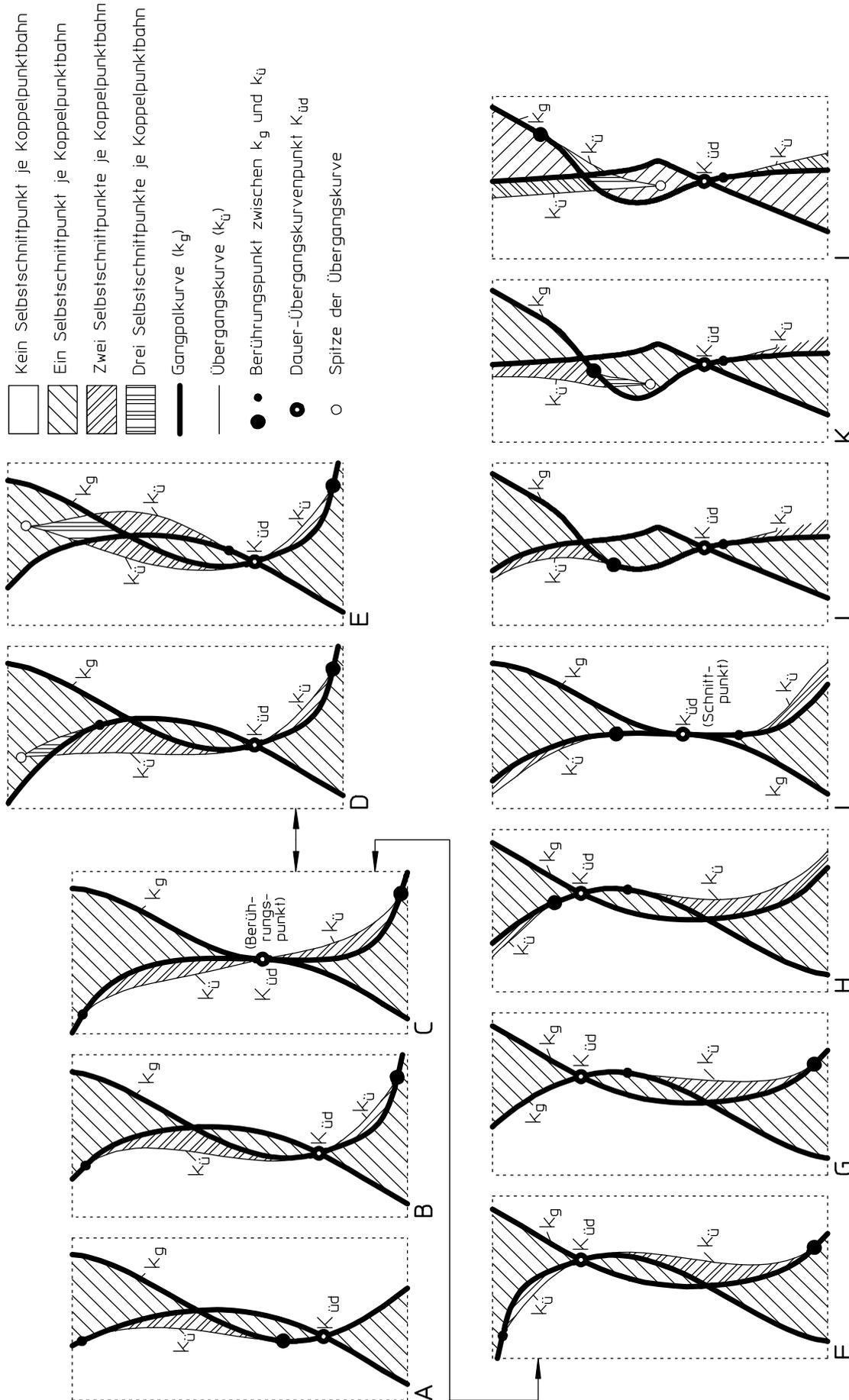


Bild 6.43: Typische Übergangskurven von Kurbelschwingen

Zwischen den einzelnen Darstellungen bestehen folgende Unterschiede:

- Die Gangpolkurve ändert ihren typischen Verlauf:
 - In Bild 6.43-C fallen z. B. die beiden Selbstschnittpunkte der Gangpolkurve zusammen (vgl. hierzu Abschnitt 6.6.2.1.2)
 - In Bild 6.43-I liegt ein Selbstschnittpunkt der Gangpolkurve im Unendlichen, weshalb die Gangpolkurve ein Feld weniger als die in der Nachbarschaft abgebildeten Gangpolkurven erzeugt (vgl. hierzu Abschnitt 6.6.2.1.1)
- Zwischen zwei Darstellungen (vgl. z. B. die Bilder 6.43-A und 6.43-B) wird **ein** Berührungspunkt (der mit dem größeren Durchmesser) zwischen Gangpolkurve und Übergangskurve entlang eines Gangpolkurvenastes über einen Selbstschnittpunkt der Gangpolkurve hinaus verschoben.
- Der Selbstberührungspunkt zwischen Übergangskurve und Gangpolkurve ändert zwar nicht qualitativ seine Lage auf der Gangpolkurve, aber das durch beide Kurven und den Selbstberührungspunkt abgegrenzte Feld ändert relativ zur Gangpolkurve seine Seite (vgl. z. B. die Bilder 6.43-J und 6.43-K). Dies hat zur Folge, dass sich die Anzahl der durch beide Kurven erzeugten Felder zwischen beiden Darstellungen um eins unterscheidet, wobei die Übergangskurve, die das zusätzliche Feld begrenzt, eine Spitze aufweist.
- Wandert ein Selbstberührungspunkt zwischen Übergangskurve und Gangpolkurve entlang der Gangpolkurve ins Unendliche „und (entlang der nicht eingezeichneten Asymptote) darüber hinaus“ (z. B. Bild 6.43-G im Vergleich zu Bild 6.43-H), so entsteht eine Übergangskurve mit einer Asymptote.

Die zentrische Schubkurbel besitzt im allgemeinen keine Übergangskurve. Der typische Verlauf der Übergangskurven von versetzten Schubkurbeln entspricht der Abbildung in Bild 6.43-A.

Bild 6.44 zeigt die verschiedenen typischen Verläufe von Übergangskurven der umlauf-fähigen Doppelschwinge. Der Sonderfall, in dem zwei Gangpolkurvenschnittpunkte zusammenfallen, ist in Bild 6.44-G zu finden.

Es gibt nur einen typischen Verlauf der Übergangskurven sowie der Gangpolkurven (entsprechend Bild 2.24, S. 38) von umlauf-fähigen Doppelkurbeln. Das gleiche gilt für Kurbelschleifen mit umlaufendem Schleifenglied, deren Gangpolkurven und Übergangskurven denen der Doppelkurbeln ähnlich sind.

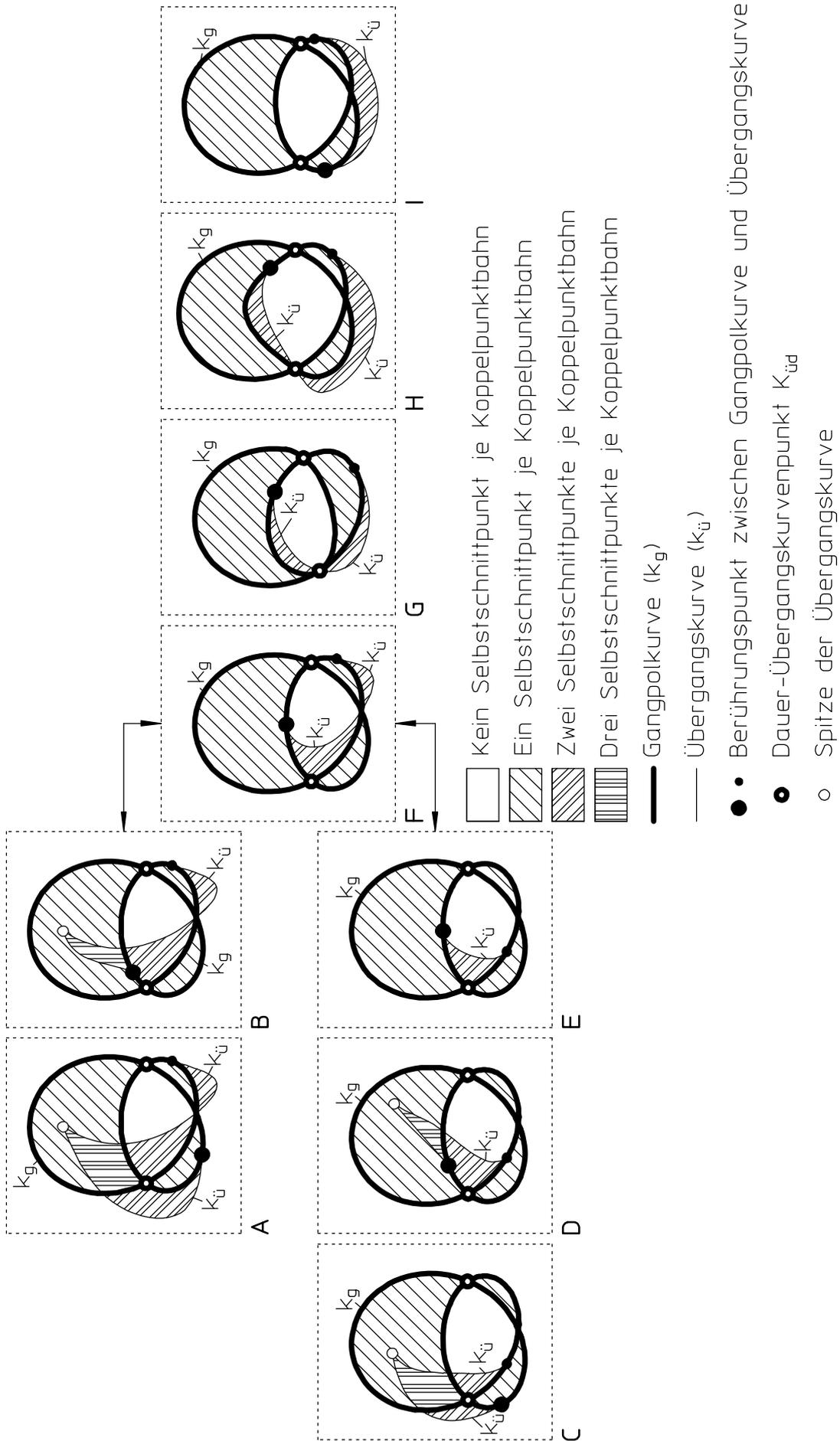


Bild 6.44: Typische Übergangskurven von umlaufähigen Doppelschwingen

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

6.6.4.2 Die Übergangskurven von totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken

Von allen totalschwingfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken gibt es Vertreter, die keine Übergangskurven besitzen. Aber nur bei Doppelinnenschwingen konnten trotz der Variation der Abmessungen bisher keine Übergangskurven entdeckt werden.

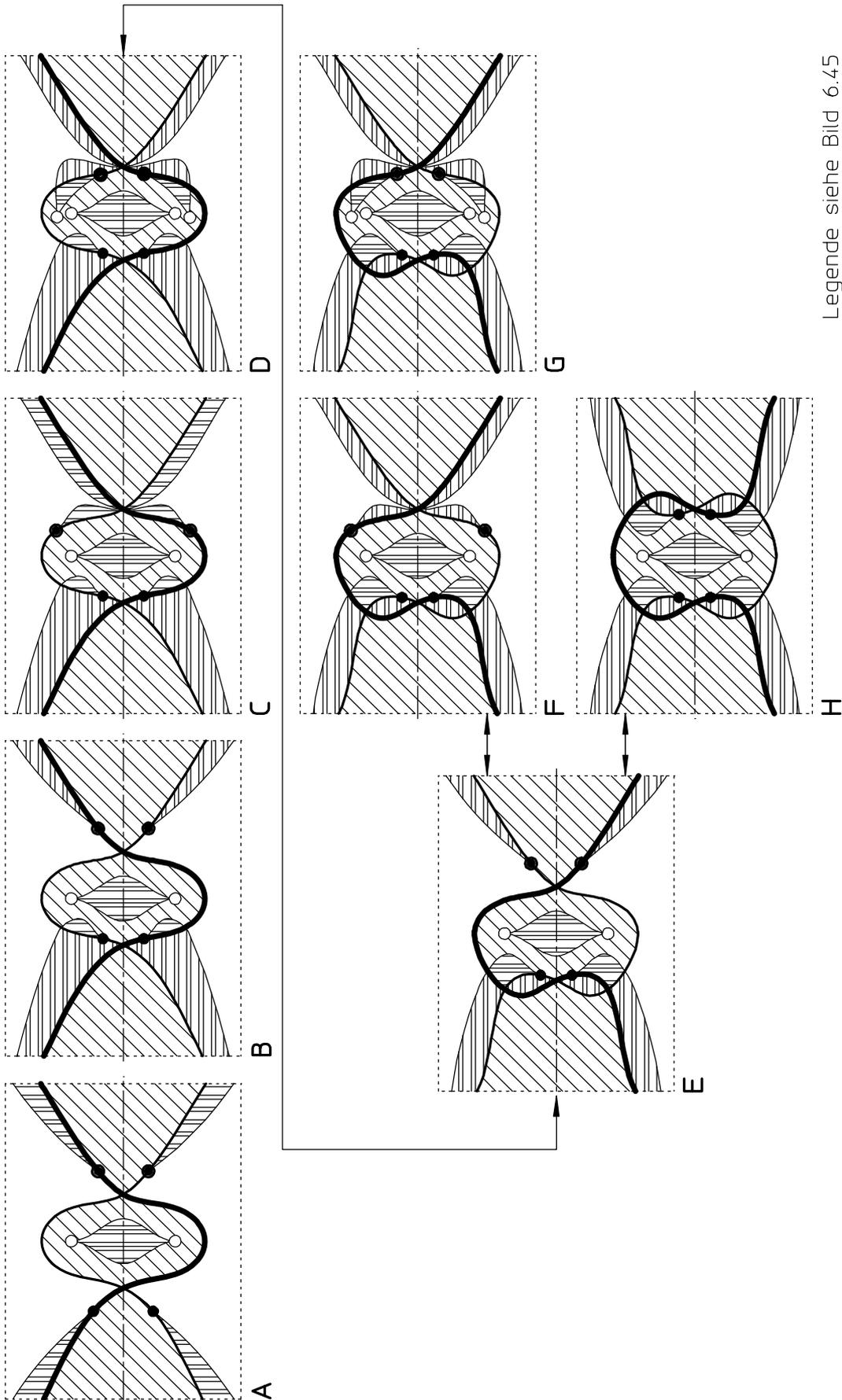
Die typischen Verläufe der Übergangskurve von Außen-Innenschwingen sind in Bild 6.45 zu finden. Allen ist gemeinsam, daß die Übergangskurve ein sichelförmiges Feld mit zwei Spitzen innerhalb eines von der Gangpolkurve und dem Unendlichen begrenzten Feldes umschreibt, durch daß die Symmetrieachse geht.

Die Abbildungen 6.45-A bis 6.45-D zeigen Gangpolkurven mit einem Selbstschnittpunkt eines jeden Gangpolkurvenastes (vgl. Zeile 2 in Bild 6.17, S. 201), alle anderen Gangpolkurven in Bild 6.45 weisen Gangpolkurven ohne Selbstschnittpunkte der Gangpolkurvenäste auf (vgl. Zeile 7 in Bild 6.17). Die Abbildungen 6.45-A, 6.45-B, 6.45-M und 6.45-N zeigen Gangpolkurven der Spalte D in den Zeilen 2 und 7 von Bild 6.17, alle anderen Gangpolkurven sind in der Spalte C der gleichen Zeilen zu finden.

Bild 6.45-K zeigt Berührungspunkte zwischen der Gangpolkurve und der Übergangskurve, die nicht gleichzeitig eine Spitze der Übergangskurve darstellen und bei denen der Punkt auf der Gangpolkurve zu einer anderen Getriebestellung gehört als der Punkt auf der Übergangskurve. Solch ein Berührungspunkt konnte bei umlauffähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben bisher nicht gefunden werden.

Die Doppelaußenschwinge erzeugt zwar nur drei qualitativ unterscheidbare Verläufe der Gangpolkurve (vgl. die Abbildungen A bis D, E bis G sowie H in Bild 6.46 (S. 253) mit den Abbildungen der Spalten C und D sowie E in Zeile 7 von Bild 6.17, S. 201). Die Übergangskurven dieser Getriebe weisen jedoch etwas mehr Unterschiede auf. Allen gemeinsam ist ein von der Übergangskurve umschlossenes symmetrisches Feld mit zwei Spitzen, das in einem von der Gangpolkurve umschlossenen Feld liegt, das nicht ans Unendliche angrenzt. Alle Übergangskurven besitzen außerdem zwei Asymptoten, die in den erwähnten Bildern nicht dargestellt sind.

Die Abbildungen 6.46-C, 6.46-D, 6.46-F und 6.46-G weisen Schnittpunkte zweier - symmetrischer - Übergangskurvenäste im Gelenk B auf, das sich in dem in den Abbildungen rechts - auf der Symmetrieachse - liegenden Schnittpunkt der Gangpolkurve befindet.



Legende siehe Bild 6.45

Bild 6.46: Die typischen Übergangskurven von totalschwingfähigen Doppelaufenschwingen

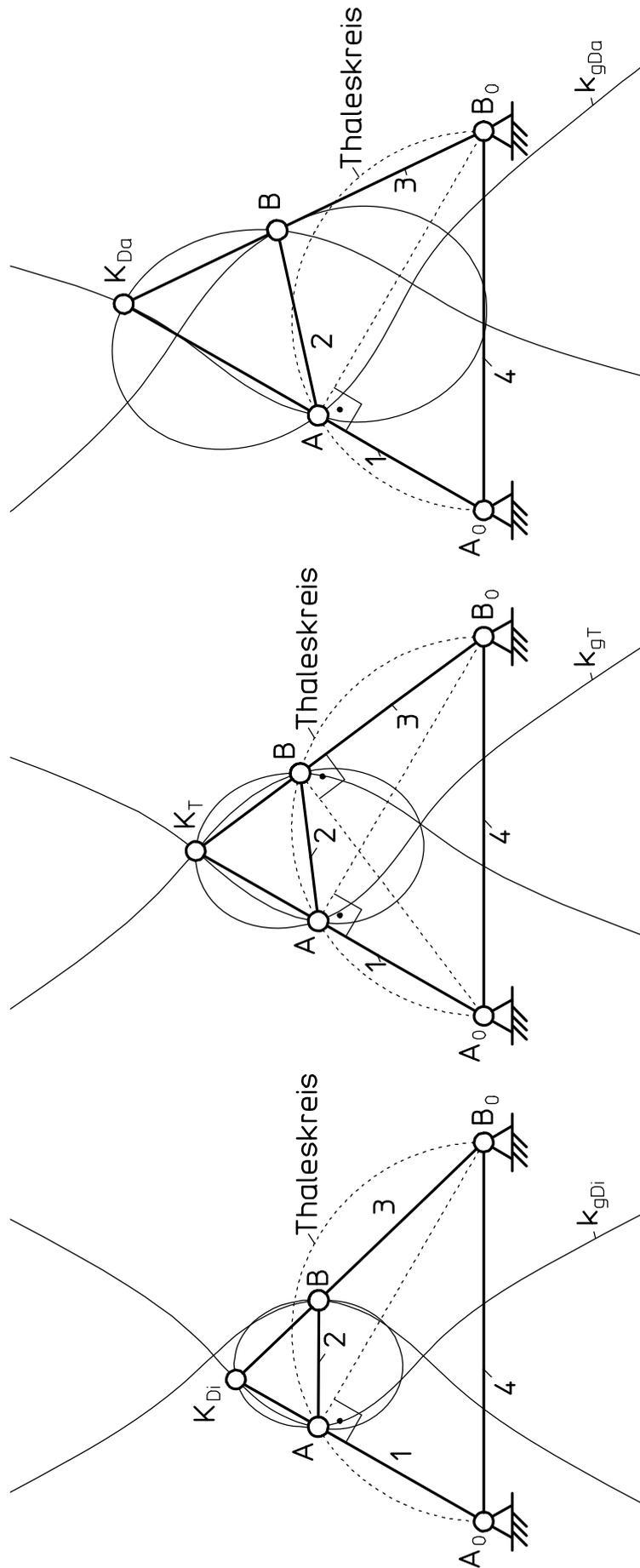


Bild 6.46a: Doppelinenschwingen mit Gangpolkurven k_g in einer Getriebege, in der ein Dauer-Übergangskurvenpunkt (A) auf dem Thaleskreis über dem Gestell liegt, und der andere Dauer-Übergangskurvenpunkt (B) innerhalb (k_{gDi}), auf (k_{gT}) bzw. außerhalb (k_{gDa}) des Thaleskreises liegt.

6.6.4.2.1 Bedingung zum Bestimmen, ob eine totalschwingfähige Doppelinnenschwinge mit Hilfe eines Zweischlags angetrieben werden kann

Totalschwingfähige viergliedrige Gelenkgetriebe können nicht direkt an einem ihrer im Gestell gelagerten Glieder von einem umlaufenden Antrieb in Bewegung gesetzt werden. Es gibt jedoch die Möglichkeit, bei geeigneter - d. h. zumindest selbstschnittpunktfreier - Koppelpunktbahn k_K (Bild 6.46b) über einen Zweischlag C_0CK das Getriebe am Koppelpunkt K anzutreiben, wobei eine als Antrieb verwendbare Kurbel C_0C innerhalb der Koppelpunktbahn im Gelenk C_0 gestellfest zu lagern ist [20]. Bisher gab es jedoch kein Kriterium, um anhand der Getriebeabmessungen feststellen zu können, ob eine totalschwingfähige Doppelinnenschwinge selbstschnittpunktfreie - und damit theoretisch für den geschilderten Antrieb geeignete - Koppelpunktbahnen aufweist oder nicht.

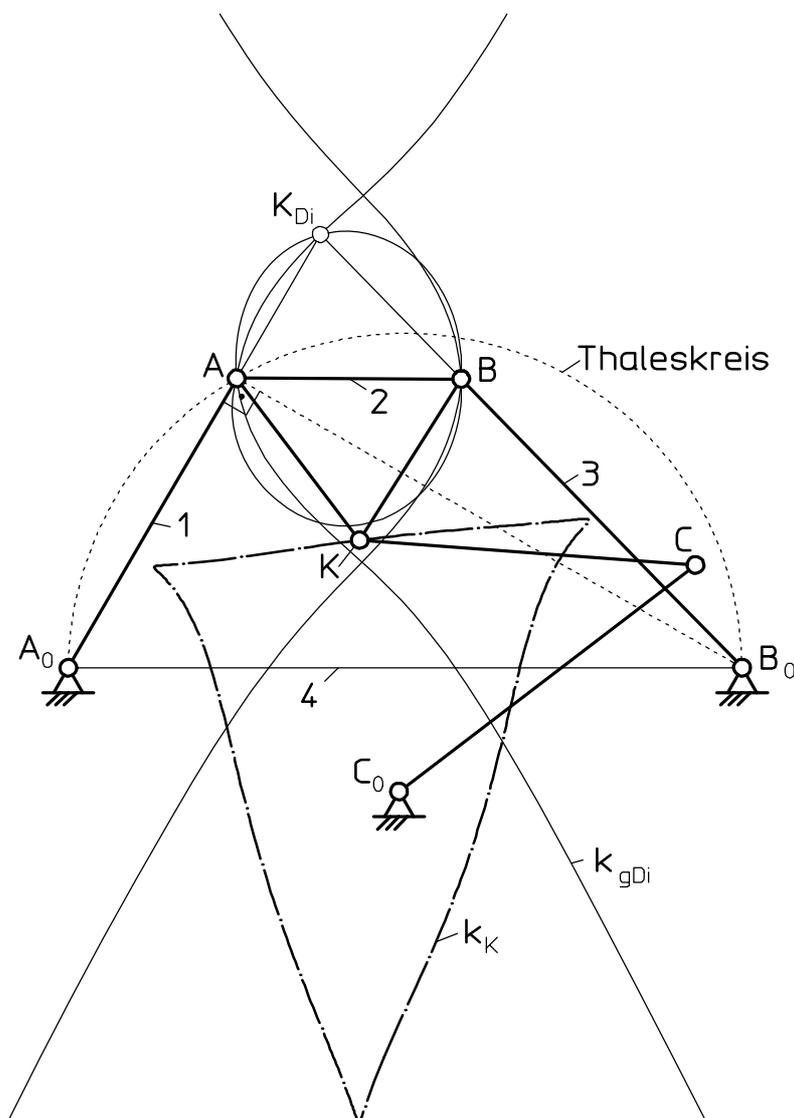


Bild 6.46b: Durch den Zweischlag KCC_0 angetriebene Doppelinnenschwinge A_0ABB_0 aus Bild 6.46a mit Gangpolkurve k_{gDi}

Wie in Abschnitt 6.6.4.2 erwähnt, konnte bisher keine totalschwingfähige Doppelinnenschwinge gefunden werden, die eine Übergangskurve besitzt. Daher wird bei diesen Getrieben ausschließlich die Gangpolkurve herangezogen zum Einteilen der Koppellebene in Felder mit Punkten, deren Bahnen die gleiche Anzahl an Selbstschnittpunkten aufweisen. Aus Bild 6.38 (S. 240) bzw. Bild 6.17 (S. 201) geht hervor, daß totalschwingfähige Doppelinnenschwinge kein Feld mit Punkten aufweisen, deren Bahnen keinen Selbstschnittpunkte besitzen, wenn die Gangpolkurve ein Feld bildet, dessen Punkte Bahnen mit drei Selbstschnittpunkten erzeugen (siehe ikonische Darstellung 2G im Vergleich zu den Darstellungen 7C bis 7E und 2C bis 2F - wobei die Gangpolkurve der Darstellung 2F nur zwei Punkte aufweist die eine Bahn mit keinem Selbstschnittpunkt erzeugt: nämlich die beiden Dreifachschnittpunkte).

Die Gangpolkurve k_{gT} in Bild 6.46a mitte (S. 254) entspricht der ikonischen Darstellung 2F in Bild 6.38 (S. 240). In einer speziellen Getriebeelage liegen beide Gelenkpunkte A und B auf dem Thaleskreis über dem Gestell 4 [vgl. Abschnitt 6.6.2.4 und Bild 6.30b (S. 229)]. Nur bei Gangpolkurven entsprechend der ikonischen Darstellung 2G in Bild 6.38 (S. 240) liegt ein Gelenkpunkt (z. B. der Punkt B) außerhalb des Thaleskreises über dem Gestell, vergleiche Gangpolkurve k_{gDa} in Bild 6.46a rechts (S. 254). Die sie erzeugenden Getriebe besitzen also kein Feld, dessen Punkte Koppelpunktbahnen ohne Selbstschnittpunkte durchfahren und die somit geeignet sind, als Anlenkpunkt für einen antreibenden Zweischlag (vgl. Bild 6.46b) verwendet zu werden.

Beim Vergleich der oberen Hälfte der Darstellungen 2G bis 2E in Bild 6.38 (S. 240) wird ersichtlich, daß der nahezu waagrecht verlaufende Teil der Schlinge des einen Gangpolkurvenastes unterhalb des Schnittpunkts des anderen Gangpolkurvenastes zu liegen kommen muß, damit ein Feld entsteht, dessen Punkte Bahnen mit keinen Selbstschnittpunkten aufweisen. Hierzu muß ein Gelenk (z. B. das Gelenk B im linken Teil von Bild 6.46a, S. 254) der zugehörigen totalschwingfähigen Doppelinnenschwinge innerhalb des Thaleskreises über dem Gestell 4 liegen, wenn der andere Gelenkpunkt (z. B. das Gelenk A) sich auf dem Thaleskreis befindet. Dies ist nur möglich, wenn die Koppel 2 kürzer ist als bei einer Doppelinnenschwinge, deren Gangpolkurve k_{gT} zwei Dreifachschnittpunkte aufweist, bei ansonsten gleichen Abmessungen der Glieder 1 und 3 sowie 4.

Die Bedingung, die eine totalschwingfähige Doppelinnenschwinge erfüllen muß, wenn sie Punkte mit Koppelpunktbahnen ohne Selbstschnittpunkte aufweisen soll, erhält man also durch Umformen der Gleichung (6.54) zu der Ungleichung

$$\ell_2 \leq \sqrt{\ell_4^2 - \ell_1^2 - \ell_3^2 + 2 \cdot \frac{\ell_1 \ell_3}{\ell_4^2} \cdot \left[\ell_1 \cdot \ell_3 - \sqrt{(\ell_4^2 - \ell_1^2) \cdot (\ell_4^2 - \ell_3^2)} \right]}. \quad (6.72)$$

Wie aus Abschnitt 6.6.2.4 hervorgeht, müssen die Gliedlängen 1, 3 und 4 der gesuchten Doppelinnenschwinge die Bedingung (6.56)

$$l_4 > \sqrt{l_1^2 + l_3^2}.$$

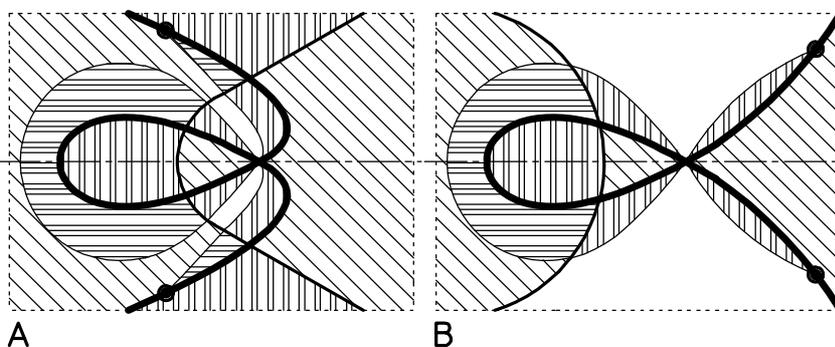
ebenfalls erfüllen, damit die Ungleichung (6.72) Gliedlängen der Koppel 2 mit reellen Werten liefert.

6.6.4.3 Die Übergangskurven von durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken

Alle durchschlagfähigen Gelenkgetriebe haben - wenn vorhanden - symmetrische Gangpol- und Übergangskurven. Die Symmetrieachse ist mit der Koppelgeraden identisch, die bei Getrieben mit einer Verzweigungslage gleichzeitig eine Schein-Übergangskurve darstellt.

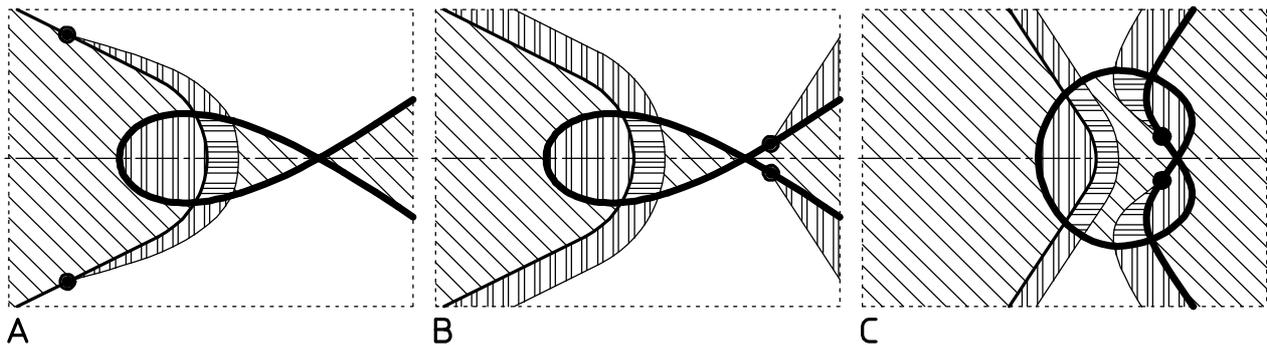
Wie bei den totalschwingfähigen Doppelinnenschwingen wurden auch bei den durchschlagfähigen Doppelinnenschwingen keine Übergangskurven gefunden. Das gleiche gilt für alle durchschlagfähigen viergliedrigen Gelenkgetriebe mit zwei Verzweigungslagen (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203). Eine Ausnahme bildet allerdings die gleichschenklige zentrische Schubkurbel, bei der die Übergangskurve ein Kreis ist mit dem gleichen Radius wie die zweifach durchlaufene Gangpolkurve, die einen Kardankreis darstellt (vgl. Abschnitt 4.5). Die Übergangskurve dieses Getriebes lässt sich aufgrund dieser Identität allerdings auch nicht mit den in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren ermitteln.

Durchschlagfähige Kurbelinnenschwingen mit Gangpolkurven entsprechend Spalte C der Zeilen 3 und 4 in Bild 6.17 (S. 201) können Übergangskurven aufweisen, deren typischen Verläufe in Bild 6.47 zu finden sind. Bei Gangpolkurven entsprechend den Spalten D bis G der Zeilen 3 und 4 in Bild 6.17 (vgl. Tabelle 6.1, S. 202/203) konnte - wie bei Gangpolkurven von durchschlagfähigen Doppelinnenschwingen - keine Übergangskurve ermittelt werden.



Legende siehe Bild 6.45

Bild 6.47: Die typischen Übergangskurven von durchschlagfähigen Kurbelinnenschwingen



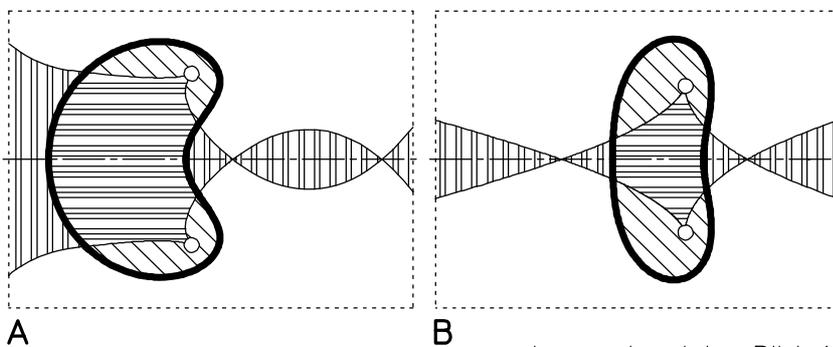
Legende siehe Bild 6.45

Bild 6.48: Die typischen Übergangskurven von durchschlagfähigen Kurbelaußenschwingen

Die typischen Verläufe der Übergangskurven von durchschlagfähigen Kurbelaußenschwingen sind in Bild 6.48 zu finden (vgl. auch ikonische Darstellungen C4 und D4 in Bild 6.17, S. 201, sowie Tabelle 6.1 auf S. 202/203).

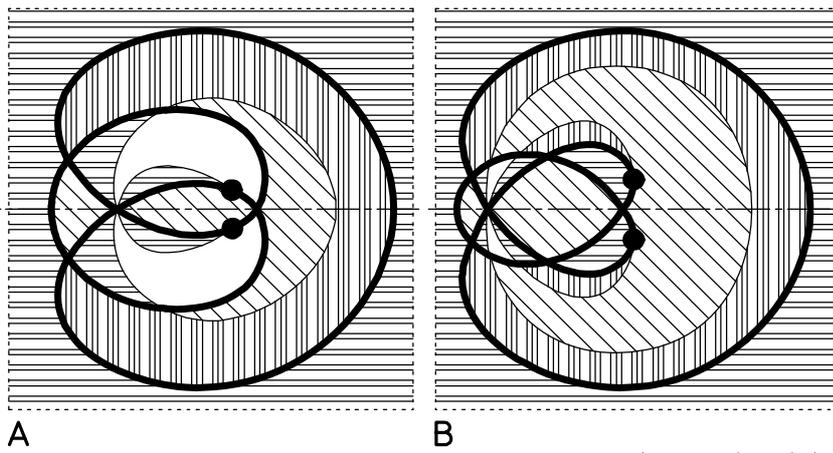
Die Gangpolkurven der durchschlagfähigen Doppelkurbeln sind wie die der umlauffähigen Doppelkurbeln geschlossen und ohne Selbstschnittpunkte (Bild 6.49). Die Übergangskurven der durchschlagfähigen Doppelkurbeln haben auch wie die Übergangskurven der umlauffähigen Doppelkurbeln (vgl. Bild 2.22, S. 36) keinen gemeinsamen Berührungspunkt mit der Gangpolkurve. Sie weisen allerdings im Gegensatz zu den zweitgenannten immer zwei (in Bild 6.49 nicht eingezeichnete) Asymptoten und vier Schnittpunkte mit der Gangpolkurve auf.

Die typischen Verläufe der Übergangskurven von durchschlagfähigen Außen-Innen-schwingen sind in Bild 6.50 zu finden (vgl. auch die ikonischen Darstellungen C1 und D1 in Bild 6.17, S. 201, und Tabelle 6.1 auf S. 202/203).



Legende siehe Bild 6.45

Bild 6.49: Die typischen Übergangskurven von durchschlagfähigen Doppelkurbeln



A

B

Legende siehe Bild 6.45

Bild 6.50: Die typischen Übergangskurven von durchschlagfähigen Außen-Innenschwingen

7 Die BALLsche Kurve

Da einfach zu handhabende Algorithmen für das Bestimmen des BALLschen Punktes einer allgemein bewegten Ebene in gestellfesten Koordinaten zur Verfügung stehen [5], [6], ist es nicht notwendig, speziell für viergliedrige ebene Gelenkgetriebe hergeleitete Gleichungssysteme [2], [26] an dieser Stelle näher zu erläutern. Da die allgemeinen Verfahren jedoch nicht auf zeichnerische Lösungen zurückführbar sind, wird für sie immer die dritte Ableitung der Bewegung der eben bewegten Ebene benötigt¹⁾. Im Anschluß an die Analyse mit denjenigen Programmen, die nur die ersten beiden Ableitungen ermitteln (z. B. [22], [30], [32], [36]), muß also vor dem Berechnen der BALLschen Kurve bzw. der Flachpunktkurve die dritte Ableitung numerisch gebildet werden. Bei Gelenkgetrieben und Räderkoppelgetrieben ist dies immer durch das Ableiten eines interpolierenden periodischen kubischen Splines (vgl. [37]) durch die 2. Ableitung mit ausreichender Genauigkeit möglich.

Um die BALLsche Kurve zu erhalten, muß die Folge aller BALLschen Punkte in gestellfesten Koordinaten - also die Flachpunktkurve - in die koppelste Ebene mit Hilfe der Gleichungen (5.49) und (5.50) transformiert werden. Für die Rücktransformation stehen die Gleichungen (5.51) und (5.52) zur Verfügung.

7.1 Die Feldeinteilung der Koppellebene mit Hilfe der Gangpolkurve und der BALLschen Kurve

Mit Hilfe der BALLschen Kurve und der Gangpolkurve ist es möglich, die Koppellebene in Felder einzuteilen, deren Punkte Bahnen mit der gleichen Anzahl an Wendepunkten durchlaufen (vgl. Bilder 1.3, S. 5, und 1.4, S. 6).

Wegen der großen Formenvielfalt der BALLschen Kurven allein bei umlauffähigen Kurbelschwingen ist es an dieser Stelle nicht möglich, eine Übersicht über alle vorkommenden BALLschen Kurven von viergliedrigen Gelenkgetrieben zu erstellen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß durchschlagfähige viergliedrige Gelenkgetriebe eine geringe Variation an typischen Verläufen der BALLschen Kurve aufweisen [43]. Das Verschaffen eines

¹⁾ Der in [6] aufgeführte Algorithmus benötigt z. B. die Bahn und die ersten drei Ableitungen der Bahn eines Punktes in kartesischen Koordinaten sowie die ersten drei Ableitungen des Winkels der eben bewegten Ebene. Der Winkel und seine Ableitungen lassen sich mit Hilfe des Satzes von Euler ermitteln [20], wenn die Bahnen von zwei Punkten der Ebene gegeben sind.

Überblicks über alle typischen Verläufe der BALLSchen Kurve bei viergliedrigen Gelenkgetrieben ist nicht so notwendig wie das Vermitteln eines Überblicks über die typischen Verläufe von Übergangskurven, da die BALLSche Kurve im Gegensatz zur Übergangskurve (vgl. Kapitel 5) relativ leicht ermittelbar ist.

Für das Aufstellen eines Algorithmus, der die von der Gangpolkurve und der BALLSchen Kurve gebildeten Felder ermittelt, sei auf Kapitel 6 verwiesen. Die dort geschilderte Vorgehensweise ist auch für diese Aufgabe anwendbar.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie eine eben bewegte Ebene in Felder eingeteilt werden kann, deren Punkte Bahnen aufweisen

- mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten oder
- mit der gleichen Anzahl an Wendepunkten.

Durch das gemeinsame Anwenden beider Feldeinteilungen ist es möglich, Felder zu umgrenzen, deren Punkte Bahnen mit einer vorgegebenen Anzahl an Selbstschnittpunkten und einer vorgegebenen Anzahl an Wendepunkten erzeugen. Da die hierfür benötigten Kurven - die Gangpolkurve und die Übergangskurve bzw. die BALLsche Kurve - im allgemeinen nur in der Form von Punktefolgen ermittelbar sind, wird ein Algorithmus vorgestellt, der ein Umranden der einzelnen Felder mit Hilfe der benötigten Punktefolgen durchführt und die Anzahl der Selbstschnittpunkte bzw. der Wendepunkte der Bahnen von Punkten einzelner Felder feststellt.

Für eine klare Begriffsbestimmung werden zusätzlich zu den bekannten Definitionen der **BALLschen Kurve** und der **Übergangskurve** die Bezeichnungen **Flachpunktkurve** und **Selbstberührungskurve** eingeführt (vgl. auch Tabelle 8.1, S. 263). Zur Abgrenzung der Übergangskurve von einigen nicht zu ihr zählenden Sonderfällen werden der **Dauer-Übergangskurvenpunkt** und die **Schein-Übergangskurve** definiert.

Es wird gezeigt, daß die Koppellebene von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe der Gangpolkurve und der Übergangskurve in zwei Schritten in Felder aufgeteilt werden kann, deren Punkte Bahnen mit der gleichen Anzahl an Selbstschnittpunkten erzeugen. Im ersten Schritt wird ausschließlich die einfach zu ermittelnde Gangpolkurve verwendet. Erst im zweiten Schritt folgt dann eine weitere Unterteilung mit Hilfe der Übergangskurve, deren Bestimmung einen größeren programmtechnischen Aufwand benötigt. Für die Feldeinteilung anhand der Gangpolkurve **wurden erstmalig alle typischen Verläufe der Gangpolkurven bestimmt** und in einer **Systematik** zusammengefaßt. Darüber hinaus wird ein umfangreicher Überblick über die typischen Feldeinteilungen durch die Gangpolkurve und die Übergangskurve gegeben.

Für die Einteilung von **Trochoiden** erzeugenden Ebenen in Felder, deren Punkte Bahnen mit der gleichen vorhersagbaren Anzahl an Selbstschnittpunkten und Wendepunkten aufweisen, wird eine **vollständige Systematik** entwickelt.

Es wird gezeigt, daß bei der zweifachen Erzeugung von Trochoiden das Ausgangsgetriebe ausschließlich Trochoiden erzeugen kann, die auch das Ersatzgetriebe in geometrisch ähnlicher Form erzeugt.

Tabelle 8.1: Zusammenstellung relevanter Bahnen und Kurven

lfd. Nr.	Benennung	Kurzzeichen	Vorkommen: (G=Gestellebene, K=Koppelebene)	Erläuterung	Transformation der Kurve	Anzahl je Getriebe	Einhüllende	Bild-Nr.	Text auf S.
1	Koppelpunktbahn		G	Spur (Bahn) eines Koppelpunktes	-	∞		1.3	
2	Gangpolkurve	k_g	K	Folge aller Punkte, deren Bahnen eine Spitze aufweisen	k_r	1		3.1a	40ff
3	Übergangskurve	k_u	K	Folge aller Punkte, deren Bahnen einen Selbstberührungspunkt aufweisen	(k_s)	0 ... n		3.9	47ff
4	Dauer-Übergangskurve(npunkt)	k_{ud}	K	Zu einem Punkt entartete Übergangskurve	k_{sd}	0 ... n		6.1	25f
5	Schein-Übergangskurve	k_{uS}	K	Gerade, deren Punkte in der gleichen Getriebestellung einen Selbstberührungspunkt durchlaufen	(k_s)	0 ... n		3.6	23ff
6	BALLsche Kurve	k_b	K	Folge aller Punkte, deren Bahnen eine vierpunktig berührende Tangente aufweisen	k_r	1		1.3	59f
7	Doppelpunktkurve	k_D	K	Folge aller Punkte einer Getriebestellung , deren Bahnen einen Doppelpunkt aufweisen	k_d	∞	k_g, k_u	2.20a	15ff
8	Dreifachpunktkurve	k_t	K	Folge aller Punkte, deren Bahnen einen Dreifachschnittpunkt aufweisen		0-1		2.9	17ff
9	Wendekreis	k_w	K	Folge aller Punkte einer Getriebestellung , deren Bahnen einen Wendepunkt aufweisen	-	∞	k_g, k_b	3.4	43
10	Rastpolkurve	k_r	G	Folge aller Momentanpole	k_g	1		3.1a	(40f)
11	Selbstberührungskurve	k_s	G	Folge aller Selbstberührungspunkte	$k_{u, k_{uS}}$	0 ... n		2.18	21
12	Dauer-Selbstberührungskurve	k_{sd}	G	Folge aller Lagen eines Dauer-Übergangskurvenpunktes	k_{ud}	0 ... n		2.21	53
13	Flachpunktkurve	k_f	G	Folge aller BALLschen Punkte	k_b	1			(7)
14	Kurve k_j	k_j	G	Übergangskurve der kinematischen Umkehrung	-	0 ... n		2.18	40
15	Drehpolkurve	k_d	G	Folge aller Doppelpunkte/ Drehpole in einer Getriebestellung	k_D	∞	k_g, k_j	2.18	26ff
16	Schnabelspitze (Teil einer Koppelpunktbahn)		G	Erzeugender Punkt liegt auf k_g , k_u und k_b . In der Schnabelspitze liegt er über k_r , k_s und k_f .	-	0 ... n		2.10	60ff

Volker Jäkel (2000): Einteilung einer eben bewegten Ebene in Felder mit qualitativ gleichen Koppelpunktbahnen unter besonderer Berücksichtigung der Übergangskurve

Es werden **erstmalig Algorithmen** vorgestellt, die es erlauben, die **Übergangskurve** und die **Selbstberührungskurve** zu ermitteln, und zwar von

- Trochoiden erzeugenden Getrieben,
- beliebigen viergliedrigen Gelenkgetrieben und
- beliebigen allgemein eben bewegten Ebenen.

Der Algorithmus zum Einteilen von **Trochoiden** erzeugenden bewegten Ebenen erlaubt es, die **Anzahl der Übergangskreise** für ein vorgegebenes Getriebe zu bestimmen, die **Startlösungen für das Ermitteln aller vorhandenen Übergangskreise vorzugeben** und mit Hilfe der Startlösungen die **Radien der Übergangskreise numerisch zu ermitteln**. Zusätzlich wird die **Gleichung zum Bestimmen des BALLschen Kreises** hergeleitet.

Für das Ermitteln der Übergangskurve von viergliedrigen Gelenkgetrieben wird aus dem **zeichnerischen Verfahren von R. MÜLLER** ein **Zeichnungsfolge-Rechenverfahren** entwickelt, das es erlaubt, Punkte der Übergangskurve zu bestimmen. Des Weiteren wird ein Algorithmus vorgestellt, der es ermöglicht, einen **Ast der Übergangskurve** von viergliedrigen Gelenkgetrieben mit Hilfe eines **hypothetischen Mechanismus** als Funktion des Antriebswinkels zu ermitteln. Die auf diese Weise gefundene Übergangskurve läßt sich einerseits für eine rechnergesteuerte Feldeinteilung verwenden. Andererseits erlaubt dieser Mechanismus, das Entstehen der Übergangskurve zu verfolgen, Schwierigkeiten beim Ermitteln zu erkennen und zu überwinden. Zusätzlich werden **Verfahren zum Bestimmen eines Selbstberührungspunktes** in verschiedenen **Sonderlagen** vorgestellt.

Für das Ermitteln von Übergangskurvenpunkten einer eben bewegten Ebene werden ein Verfahren zum Berechnen aller Übergangskurvenpunkte in einer Getriebestellung und ein weiteres Verfahren zum Ermitteln eines Astes der Übergangskurve als Funktion eines Antriebsparameters vorgestellt. Genutzt wird dieses Verfahren u. a. für die **erstmalige Darstellung der Übergangskurve eines n-gliedrigen** (hier eines fünfgliedrigen) **Gelenkgetriebes**. Außerdem wird gezeigt, welche Kombination von Getriebebelagen zum Entstehen der Schein-Übergangskurve und des Dauer-Übergangskurvenpunktes führen.

Die in dieser Arbeit für eine beliebige ebene Bewegung verallgemeinerte Bedingung für einen Doppelpunkt zeigt, daß die **Doppelpunktkurve** und die **Drehpolkurve** den **gleichen Ursprung** haben. Auf dieser Erkenntnis basierend wird die **Kurve k_j** - die **Übergangskurve der kinematischen Umkehrung** - definiert, und mit deren Hilfe gelingt es **erstmalig**, alle Einhüllenden der Drehpolkurven und damit die **theoretische Grundlage für das Polortverfahren zu beschreiben**. In einem Ausblick werden die Möglichkeiten und Grenzen für ein modifiziertes „Polortverfahren“ aufgezeigt, daß anstelle der Drehpolkurvenschar die Doppelpunktkurvenschär nutzt. In diesem Zusammenhang wird auch das Verwenden der Gangpolkurve analog zur Rastpolkurve für die Synthese von viergliedrigen Gelenkgetrieben diskutiert.

Für ein schnelles Eingrenzen des geometrischen Ortes aller Doppelpunkte bzw. aller Drehpole werden die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden herangezogen, die somit in der Koppelebene den geometrischen Ort für die Doppelpunktkurven, die Gangpolkurve, die Übergangskurven, und die Dreifachpunktkurve bzw. in der Gestellebene den geometrischen Ort für die Drehpolkurven, die Rastpolkurve, die Selbstberührungskurven und die Kurven k_j einschränken. Die Schwingwinkel-Begrenzungsgeraden erlauben es außerdem, Einschnürungen der Drehpolkurvenschar bzw. der Doppelpunktkurvenschar vorherzusagen. Zusätzlich wird gezeigt, wie mit Hilfe einer Drehpolkurvenschar die Dreifachpunktkurve bestimmt werden kann.

Es wird eine Ungleichung aufgestellt, die es erlaubt, anhand der Gliedlängen einer total-schwingfähigen Doppelinnenschwinge vorauszusagen, ob die **Doppelinnenschwinge** für das Antreiben mit Hilfe eines Zweischlags geeignete **Koppelpunktbahnen ohne Selbst-schnittpunkte** erzeugt.

Für das rechnerinterne Weiterverarbeiten von als Punktefolgen gegebenen Kurven werden Verfahren zum Ermitteln von Selbstschnittpunkten und von Schnittpunkten bzw. von Berührungspunkten zwischen verschiedenen Kurven vorgestellt. Für das Ermitteln aller reellen Schnittpunkte werden der Begriff Quasi-Asymptote eingeführt und Möglichkeiten zum Erkennen und Verlängern von Quasi-Asymptoten aufgezeigt.

Ein ebenfalls vorgestellter Algorithmus zum Bestimmen, ob ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines geschlossenen Polygons liegt, beinhaltet Verfahren zum Erkennen des Umlaufsinnns einer Punktefolge und zum Ermitteln des geringsten Abstandes zwischen einem Punkt und einer als Punktefolge gegebenen Kurve.

In dieser Arbeit wurden beispielartig die Übergangskurven von vorgegebenen ebenen Bewegungen einer Ebene ermittelt. Das Finden einer brauchbaren Ausgangslösung für das Ermitteln eines Astes der Übergangskurve gelingt jedoch zu oft noch nicht auf Anhieb, wenn keine leicht auffindbare Grenzlage wie bei umlauffähigen Kurbelschwingen und Doppelkurbeln bekannt ist. Außerdem ist das Überwinden von Grenzlagen ohne den steuernden Eingriff des Programmbedieners noch nicht zufriedenstellend gelöst. Das Ziel muß sein, die Einteilung von eben bewegten Ebenen in *Felder mit Punkten zum Erzeugen qualitativ gleicher Punktbahnen* in käuflich erwerbbar Analyseprogramme zu integrieren, um diese für die Suche benötigter Punktbewegungen bei vorgegebenen Getrieben allgemein für den Konstrukteur nutzbar zu machen.

Sobald ausreichend schnelle Rechner zur Verfügung stehen, sollte der Versuch unternommen werden, die Feldeinteilung während der über ein Eingabegerät¹⁾ gesteuerten Variation eines Mechanismus in Echtzeit zu erstellen. Das Ermitteln der Gangpolkurve und der BALLSchen Kurve und deren grafische Ausgabe während einer Variation des Ge-

¹⁾ wie z. B. eine Maus, einen Tablettstift oder die Drehknöpfe einer Knobbox

triebes in Echtzeit ist heutzutage schon möglich [6]. Auch das Ermitteln der Gangpolkurve, ihrer Selbstschnittpunkte (mit Hilfe des in Abschnitt 5.1.2.3 vorgestellten Algorithmus) und die grafische Ausgabe dieser Kurven in Echtzeit ist erfolgreich in einem Programm implementiert, das das Vorgeben und Variieren der Bewegung einer Ebene anhand der mausgesteuerten Eingabe der Punktbahnen von zwei Punkten vorsieht [44]. Erlaubt es die Rechnergeschwindigkeit, die Feldeinteilung ebenfalls in Echtzeit farbig unterlegt grafisch darzustellen, so ist die Möglichkeit geschaffen, dem Konstrukteur die Suche nach Punktbahnen bei neu zu entwerfenden Mechanismen zu überlassen.

A. Anhang: Parameter der den Bildern zugrunde liegenden Getriebe

Legende:

- l_1 Länge des Antriebsglieds eines viergliedrigen Gelenkgetriebes (vgl. Bild 6.30, S. 224)
- l_2 Länge der Koppel eines viergliedrigen Gelenkgetriebes
- l_3 Länge des Abtriebsgliedes eines viergliedrigen Gelenkgetriebes
- l_4 Länge des Gestells eines viergliedrigen Gelenkgetriebes
- e Versetzung eines viergliedrigen Gelenkgetriebes mit einem Schubgelenk (vgl. Bild 6.22, S. 210)
- $x_{k..}, y_{k..}$ Koordinaten eines Koppelpunktes im Koordinatensystem der Koppel (Ursprung im Gelenk A, x-Achse weist zum Gelenk B - vgl. Koordinatensystem x_2, y_2 in Bild 5.8, S. 126)

Bild 1.3

$$\begin{aligned}
 & l_1 = 10, l_2 = 25, l_3 = 20, l_4 = 30 \\
 & x_{k1} = 0, \quad y_{k1} = 0; \quad x_{k2} = 25, \quad y_{k2} = 0; \\
 & x_{k3} = 26.13, \quad y_{k3} = 42.44; \quad x_{k4} = 29.69, \quad y_{k4} = 36.44; \\
 & x_{k5} = -5.88, \quad y_{k5} = 24.12; \quad x_{k6} = 7.98, \quad y_{k6} = -17.05; \\
 & x_{k7} = -8.83, \quad y_{k7} = 30.79; \quad x_{k8} = 22.10, \quad y_{k8} = -34.04; \\
 & x_{k9} = 54.59, \quad y_{k9} = -33.78; \quad x_{k10} = 26.53, \quad y_{k10} = 11.25; \\
 & x_{k11} = 51.96, \quad y_{k11} = 11.32; \quad x_{k12} = 39.42, \quad y_{k12} = 28.49; \\
 & x_{k13} = 80.36, \quad y_{k13} = 16.98; \quad x_{k14} = 15.14, \quad y_{k14} = -7.00 \\
 & x_{k15} = 47.84, \quad y_{k15} = -2.35; \quad x_{k16} = 31.35, \quad y_{k16} = 58.56; \\
 & x_{k17} = 35.00, \quad y_{k17} = 47.32; \quad x_{k18} = 19.96, \quad y_{k18} = 52.77; \\
 & x_{k19} = 38.14, \quad y_{k19} = 64.24; \quad x_{k20} = -0.85, \quad y_{k20} = 72.89; \\
 & x_{k21} = 25.67, \quad y_{k21} = 82.51; \quad x_{k22} = -42.95, \quad y_{k22} = 16.06 \\
 & x_{k23} = 29.44, \quad y_{k23} = 23.46
 \end{aligned}$$

Bild 1.4

$$\begin{aligned}
 & l_1 = 20, l_2 = 30, l_3 = 25, l_4 = 10 \\
 & x_{k1} = 12.03, \quad y_{k1} = -15.4; \quad x_{k2} = 7.28, \quad y_{k2} = -26.24; \\
 & x_{k3} = 7.85, \quad y_{k3} = -39.66 \quad x_{k4} = 30.46 \quad y_{k4} = -44.65
 \end{aligned}$$

Bild 2.7

$$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$$

Bild 2.8

$$l_1 = 10, l_2 = 40, l_3 = 30, l_4 = 20, x_k = 2.087, y_k = 10.590$$

Bild 2.9

$$l_1 = 10, l_2 = 40, l_3 = 30, l_4 = 20$$

Bild 2.10

$$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275, x_k = -533.768, y_k = -399.355$$

Bild 2.11

$$\begin{aligned}
 & l_1 = 30, l_2 = 60, l_3 = 80, l_4 = 100, \\
 & x_{k1}=48, y_{k1}=56, x_{k\bar{u}}=54.318, y_{k\bar{u}}=46.673, x_{k2}=58, y_{k2}=40
 \end{aligned}$$

Bild 2.14

$$\begin{aligned}
 & l_1 = 20, l_2 = 40, l_3 = 30, l_4 = 10, \\
 & x_{kA}=20, y_{kA}=5, x_{kB}=20, y_{kB}=0, x_{kA'}=20, y_{kA'}=-5
 \end{aligned}$$

Bild 2.18

$$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275$$

Bild 2.19

$$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275$$

Bild 2.20

$$l_1 = 100, l_2 = 50, l_3 = 130, l_4 = 150$$

Bild 2.20a

$$l_1 = 100, l_2 = 50, l_3 = 130, l_4 = 150$$

Bild 2.21

$$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500, x_{kA}=250, y_{kA}=200$$

Bild 2.22

$$l_1 = 100, l_2 = 50, l_3 = 130, l_4 = 150$$

Bild 2.23

$$l_1 = 10, l_2 = 5, l_3 = 10, l_4 = 17$$

Bild 2.24	$l_1 = 100, l_2 = 150, l_3 = 130, l_4 = 50$
Bild 3.1	$l_1 = 20, l_2 = 20, l_3 = 20, l_4 = 40, x_k = 10, y_k = 17.32$
Bild 3.2	$l_1 = 20, l_2 = 20, l_3 = 20, l_4 = 40$
Bild 3.3a	$l_1 = 10, l_2 = 70, l_3 = 70, l_4 = 10, x_k = -22.0194, y_k = 7.2638$
Bild 3.4	$l_1 = 120, l_2 = 125, l_3 = 100, l_4 = 55$
Bild 3.5	$l_1 = 10, l_2 = 70, l_3 = 70, l_4 = 10$
Bild 3.6	$l_1 = 45, l_2 = 80, l_3 = 60, l_4 = 65, x_k = 46,15, y_k = 0$
Bild 3.7	$l_1 = 100, l_2 = 150, l_3 = 130, l_4 = 50,$ $x_{k\ddot{u}123} = 48.942, y_{k\ddot{u}123} = -94.592, x_{kD} = 50, y_{kD} = -90,$ $x_{k\ddot{u}23} = 49.018, y_{k\ddot{u}23} = -90, x_{k\ddot{u}12} = 51.108, y_{k\ddot{u}12} = -90$
Bild 3.8	$l_1 = 120, l_2 = 150, l_3 = 130, l_4 = 50$
Bild 3.9	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 3.10	$l_1 = 10, l_2 = 17, l_3 = 10, l_4 = 5$
Bild 3.11	$l_1 = 53, l_2 = 70, l_3 = 35, l_4 = 18$
Bild 3.12	$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275$
Bild 3.13	$l_1 = 10, l_2 = 25, l_3 = 20, l_4 = 30$
Bild 3.14	$l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 15, l_4 = 9.2, x_k = 3.904, y_k = 3.050$
Bild 3.15	$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275,$ $x_k = -533.768, y_k = -399.355$
Bild 3.16	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 3.17	$l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275$
Bild 5.28	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 6.1	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 6.2	$l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 12, l_4 = 11$
Bild 6.6	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 6.7	$l_1 = 100, l_2 = 50, l_3 = 130, l_4 = 150$
Bild 6.9	$l_1 = 100, l_2 = 50, l_3 = 130, l_4 = 150$
Bild 6.11	$l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$
Bild 6.16a	$l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 12, l_4 = 11$
Bild 6.17	C7: u/u-s ¹⁾ $l_1 = 9, \quad l_2 = 35, \quad l_3 = 25, \quad l_4 = 20$ A9: u/u-u $l_1 = 25, \quad l_2 = 35, \quad l_3 = 30.5, \quad l_4 = 20$ C10: u/s-s $l_1 = 25, \quad l_2 = 14.5, \quad l_3 = 30, \quad l_4 = 20$ C2: t/is-is $l_1 = 20, \quad l_2 = 5, \quad l_3 = 24, \quad l_4 = 40$

¹⁾ Vor dem Schrägstrich: u \curvearrowright umlauffähig, t \curvearrowright totalschwingfähig, d \curvearrowright durchschlagfähig
Nach dem Schrägstrich: Bezeichnungen entsprechend VDI Richtlinie 2145 [42]

C2:	t/as-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 16,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 20$
D2:	t/as-is	$l_1 = 30,$	$l_2 = 15,$	$l_3 = 15.5,$	$l_4 = 29$
D2:	t/is-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 7.5,$	$l_4 = 38$
E2:	t/is-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 10,$	$l_4 = 38$
F2:	t/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 25,$	$l_3 = 8.7,$	$l_4 = 36.5$
G2:	t/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 25,$	$l_3 = 15,$	$l_4 = 30.5$
C7:	t/is-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 80$
C7:	t/as-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = 40.5,$	$l_4 = 20$
C7:	t/as-as	$l_1 = 25,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = 29.5,$	$l_4 = 20$
D7:	t/is-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 19.5,$	$l_3 = 7.5,$	$l_4 = 38$
D7:	t/as-as	$l_1 = 25,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = 10.5,$	$l_4 = 20$
D7:	t/as-is	$l_1 = 31,$	$l_2 = 52,$	$l_3 = 63,$	$l_4 = 41$
E7:	t/is-is	$l_1 = 25,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 66$
E7:	t/as-as	$l_1 = 16,$	$l_2 = 30,$	$l_3 = 15,$	$l_4 = 28.5$
C1:	d/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 5,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 40$
C1:	d/as-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 15,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 25$
D1:	d/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 7.5,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 37.5$
D1:	d/as-is	$l_1 = 16,$	$l_2 = 15,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 29$
E1:	d/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 8,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 37$
F1:	d/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 8.5,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 36.5$
G1:	d/is-is	$l_1 = 20,$	$l_2 = 15,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 30$
C3:	d/2u-is	$l_1 = 7.5,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 37.5$
D3:	d/2u-is	$l_1 = 8,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 37$
F3:	d/2u-is	$l_1 = 8.5,$	$l_2 = 25,$	$l_3 = 20,$	$l_4 = 36.5$
G3:	d/2u-is	$l_1 = 15,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 30$
C4:	d/2u-is	$l_1 = 5,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 40$
D4:	d/2u-is	$l_1 = 5,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 10,$	$l_4 = 25$
C4:	d/2u-as	$l_1 = 15,$	$l_2 = 30,$	$l_3 = 25,$	$l_4 = 20$
D4:	d/2u-as	$l_1 = 16,$	$l_2 = 30,$	$l_3 = 15,$	$l_4 = 29$
A9:	d/2u-2u	$l_1 = 25,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 30,$	$l_4 = 15$
A9:	d/2u-u	$l_1 = 10,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = 20,$	$l_4 = 10$
A10:	d/u-is	$l_1 = 10,$	$l_2 = 10,$	$l_3 = 20,$	$l_4 = 20$
Schubkurbeln u. ä.:					
B7:	u/u-g	$l_1 = 30,$	$l_2 = 60,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 0$
C7:	u/u-g	$l_1 = 30,$	$l_2 = 60,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 20$
B10:	u/s-g	$l_1 = 30,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 0$
C10:	u/s-g	$l_1 = 30,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 5$
C2:	t/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 25$
D2:	t/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 30,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 5$
C7:	t/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 60,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 70$
D7:	t/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 40,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 32$
C1:	d/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 10,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 20$
D1:	d/ss-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 20,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 10$
C3:	d/2u-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 35,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 5$
C4:	d/2u-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 60,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 30$
A9:	d/u-ig	$l_1 = 30,$	$l_2 = 30,$	$l_3 = -,$	$l_4 = -, e = 0$

Kurbelschleifen u. ä.:

C6:	u/u-s	$l_1 = 40,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 70,$	$e = 0$
C8:	u/u-s	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 60,$	$e = 14$
A9:	u/u-u	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 30,$	$e = 14$
C8:	t/as-ss	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 45,$	$e = 20$
D8:	t/as-ss	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 60,$	$e = 16$
C5:	d/2u-ss	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 60,$	$e = 15$
A9:	d/2u-2u	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 5,$	$e = 40$
A9:	d/2u-u	$l_1 = 45,$	$l_2 = -,$	$l_3 = -,$	$l_4 = 45,$	$e = 0$

Bild 6.18	$l_1 = 50, l_2 = 75, l_3 = 75, l_4 = 90, x_k = 122.6667, y_k = 64.8554$
Bild 6.19	$l_1 = 33.333, l_2 = 94.281, l_3 = 80, l_4 = 60$
Bild 6.20	$l_1 = 33.333, l_2 = 94.281, l_3 = 80, l_4 = 60$
Bild 6.21	$l_1 = 33.333, l_2 = 70.632, l_3 = 50, l_4 = 60$
Bild 6.22	$l_1 = 36, l_2 = 66, e = 36$
Bild 6.23a	$l_1 = 4, l_4 = 7, e = 0$ bzw. $e = 2$
Bild 6.24	$l_1 = 33.333, l_2 = 86.666, l_3 = 100, l_4 = 60$
Bild 6.25	$l_1 = 31.225, l_2 = 20, l_3 = 60, l_4 = 55$
Bild 6.26	$l_1 = 31.225, l_2 = 20, l_3 = 60, l_4 = 55$
Bild 6.27	$l_1 = 31.225, l_2 = 20, l_3 = 60, l_4 = 55$
Bild 6.28	$l_1 = 37.5, l_2 = 84.77, l_3 = 60, l_4 = 56.25$
Bild 6.29	$l_1 = 15, l_2 = 33.75, l_3 = 30, l_4 = 56.25$
Bild 6.30	$l_1 = 15, l_2 = 20, l_3 = 40, l_4 = 32.015625$
Bild 6.30b	$l_1 = 30, l_2 = 23.5692, l_3 = 36, l_4 = 60, x_k = 13,3174, y_k = 17.7566$
Bild 6.43	A: $l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 500$ B: $l_1 = 120, l_2 = 247, l_3 = 350, l_4 = 290$ C: $l_1 = 120, l_2 = 247.538, l_3 = 350, l_4 = 275$ D: $l_1 = 120, l_2 = 247, l_3 = 350, l_4 = 240$ E: $l_1 = 120, l_2 = 247, l_3 = 350, l_4 = 225$ F: $l_1 = 120, l_2 = 280, l_3 = 350, l_4 = 275$ G: $l_1 = 120, l_2 = 350, l_3 = 350, l_4 = 275$ H: $l_1 = 120, l_2 = 400, l_3 = 350, l_4 = 275$ I: $l_1 = 120, l_2 = 428.632, l_3 = 350, l_4 = 275$ J: $l_1 = 120, l_2 = 450, l_3 = 350, l_4 = 275$ K: $l_1 = 120, l_2 = 475, l_3 = 350, l_4 = 275$ L: $l_1 = 120, l_2 = 500, l_3 = 350, l_4 = 275$
Bild 6.44	A: $l_1 = 60, l_2 = 43.589, l_3 = 96, l_4 = 80$ B: $l_1 = 60, l_2 = 43.589, l_3 = 93, l_4 = 80$ C: $l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 29$ D: $l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 32.5$ E: $l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 35$

$$F: l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 38.5$$

$$G: l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 40.298$$

$$H: l_1 = 60, l_2 = 43.589, l_3 = 88, l_4 = 80$$

$$I: l_1 = 48, l_2 = 7, l_3 = 27, l_4 = 60$$

Bild 6.45

$$A: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 17, l_4 = 23$$

$$B: l_1 = 30, l_2 = 15, l_3 = 17, l_4 = 23$$

$$C: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 30, l_4 = 20$$

$$D: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 17, l_4 = 18$$

$$E: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 17, l_4 = 15$$

$$F: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 15, l_4 = 11$$

$$G: l_1 = 40, l_2 = 50, l_3 = 70, l_4 = 30$$

$$H: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 17, l_4 = 11$$

$$I: l_1 = 25, l_2 = 16, l_3 = 17, l_4 = 9$$

$$J: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 17, l_4 = 7$$

$$K: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 15, l_4 = 9.2$$

$$L: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 14, l_4 = 9.5$$

$$M: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 14, l_4 = 10$$

$$N: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 17, l_4 = 13$$

Bild 6.46

$$A: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 10, l_4 = 10$$

$$B: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 19, l_4 = 9.5 \text{ ???}$$

$$C: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 19, l_4 = 9.5 \text{ ???}$$

$$D: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 19, l_4 = 10$$

$$E: l_1 = 10, l_2 = 13, l_3 = 8, l_4 = 9$$

$$F: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 18, l_4 = 11.5$$

$$G: l_1 = 10, l_2 = 20, l_3 = 19, l_4 = 10.5$$

$$H: l_1 = 16, l_2 = 30, l_3 = 15, l_4 = 28.5$$

Bild 6.46a

$$k_{gDi}: l_1 = 60, l_2 = 40, l_3 = 72, l_4 = 120$$

$$k_{gT}: l_1 = 60, l_2 = 47.1384, l_3 = 72, l_4 = 120$$

$$k_{gDA}: l_1 = 60, l_2 = 60, l_3 = 72, l_4 = 120$$

Bild 6.46b

$$l_1 = 60, l_2 = 40, l_3 = 72, l_4 = 120$$

Bild 6.47

$$A: l_1 = 30, l_2 = 16, l_3 = 15, l_4 = 29$$

$$B: l_1 = 22, l_2 = 68, l_3 = 90, l_4 = 44$$

Bild 6.48

$$A: l_1 = 10, l_2 = 40, l_3 = 30, l_4 = 13$$

$$B: l_1 = 10, l_2 = 40, l_3 = 30, l_4 = 20$$

$$C: l_1 = 16, l_2 = 40, l_3 = 15, l_4 = 29$$

Bild 6.49

$$A: l_1 = 20, l_2 = 60, l_3 = 70, l_4 = 10$$

$$B: l_1 = 53, l_2 = 70, l_3 = 35, l_4 = 18$$

Bild 6.50

$$A: l_1 = 30, l_2 = 15, l_3 = 29, l_4 = 16 \text{ ???}$$

$$B: l_1 = 30, l_2 = 15, l_3 = 16, l_4 = 29$$

9 Literatur

- [1] GÜNZEL, D.:
Koppelkurvenatlas ebener viergliedriger Gelenkgetriebe
Verlag Shaker, Aachen 1995
- [2] MÜLLER, R.:
Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks im Zusammen-
hang stehen
Festschrift zur Feier des siebenzigsten Geburtstages von Richard Dedekind
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1901
- [3] WESELKOW:
Zusammenhang zwischen Polkurven und Koppelkurven von Kurbelgetrieben
Feingerätetechnik 33 (1984) Heft 5
- [4] DIZIOĞLU, B.:
Die Theorie der Koppelkurven
VDI-Forschungsheft 639, VDI-Verlag Düsseldorf, 1987
- [5] BEREIS, R.:
Kinematik in der GAUSSschen Zahlenebene
Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Dresden 8 (1958/59) Heft 1
- [6] GÜNZEL, D.:
Ein Beitrag zur rechnerunterstützten Typ- und Maßsynthese ungleichmäßig
übersetzender Mechanismen und Getriebe
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe1 Nr. 232, VDI-Verlag Düsseldorf, 1994
Dissertation Universität-GH Siegen
- [7] MÜLLER, R.:
Über die Doppelpunkte der Koppelkurve
Zeitschrift für Mathematik und Physik 1889, Seite 303 und 372 sowie 1891, Seite 69
ff.
- [8] MILLER, S.:
Koppelkurven mit Doppelpunkten
Maschinenbautechnik (Beilage Getriebetechnik) 11 (1962) Heft 6
- [9] DE LUNG WANG und DA ZHUN XIAO:
Distribution of Coupler Curves for Crank-Rocker Linkages
Mech. Mach. Theory 28 (1993) Heft 5
- [10] FLADT, K.:
Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven
Frankfurt am Main, Akademischer Verlag 1962
- [11] LOHSE, P.:
Getriebesynthese
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokio 1986

- [12] LOHSE, W.:
Ein Beitrag zur Maßsynthese von Koppelgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Polortkurve
Dissertation TH Dresden 1973
- [13] DIZIOĞLU, B.:
Getriebelehre Band 2
Verlag Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1967
- [14] WUNDRICH, W.:
Ebene Kinematik, BI-Hochschultaschenbücher
Hochschultaschenbücher-Verlag, Mannheim, Wien, Zürich 1970
- [15] LOHSE, G.:
Analyse-Umkehr als Näherungsverfahren zur Punktlagen-Synthese ebener Viergelenkgetriebe
Dissertation TU München 1992
- [16] GIERSE, F. J.; GÜNZEL, D.; SCHAEFFER, T.:
Untersuchung und Klassifizierung von Maßsynthese-Verfahren für die Bestimmung der Kinematik ebener Führungsgetriebe
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe1 Nr. 218, VDI-Verlag Düsseldorf, 1993
- [17] Jörgensen, D.:
Auslegen von Gelenkgetrieben mit sicherer Maßbestimmung und einfacher Dynamikermittlung
Maschinenmarkt, Würzburg 89 (1983) 85
- [18] VELDKAMP, G. R.:
Rotation Curves
In: J. Mechanism (1967) 2, S. 147 ... 156
- [19] LOHSE, P.:
Neue Wege in der Getriebesynthese (Teil 1)
Feinwerktechnik 74 (1970) Heft 8
- [20] GIERSE, F. J.:
Begleittext zur Vorlesung Getriebetechnik 1
Universität-GH Siegen, Auflage 1994
- [21] HAIN, K.:
Getriebeberechnungen für hohe Ansprüche mit der Ausnutzung der Koppelkurven-Krümmungen
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe1 Nr. 155, VDI-Verlag Düsseldorf, 1987
- [22] KOOIMAN, G.:
SPACAR User Manuel
Ein Handbuch der CADOM-Group, TU Delft 1987
- [23] VDI-RICHTLINIE 2728, BLATT 1:
Lösungen von Bewegungsaufgaben mit symmetrischen Koppelkurven - Übertragungsaufgaben (Gründruck)
VDI-Verlag Düsseldorf, 1991

- [24] VOLMER, J.:
Getriebetechnik Lehrbuch
VEB Verlag Technik, Berlin 1968
- [25] BARTSCH, H.-J.:
Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1975
- [25a] MÜLLER, H. R.:
Kinematik
Walter de Gruyter & Co, Berlin 1963
- [26] SCHULTZ, G.:
Berechnen der Wendepolkurve, der Flachpolkurve und der Übergangskurve von viergliedrigen ebenen Gelenkgetrieben
Studienarbeit Universität-GH Siegen, 1990
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [27] MARX, U.:
Ein Beitrag zur kinetischen Analyse ebener viergliedriger Gelenkgetriebe unter dem Aspekt Bewegungsgüte.
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe1 Nr. 144, VDI-Verlag Düsseldorf, 1985
Dissertation Universität-GH Siegen
- [28] RISCHEN, C.:
Erweiterungen eines FORTRAN-Programms zur Ermittlung der Übertragungsfunktionen ebener viergliedriger Gelenkgetriebe
Studienarbeit Universität-GH Siegen, Siegen 1987
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [29] WERFF, K. VAN DER:
Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms, a Finite Element Approach
Dissertation TH Delft 1977
- [30] KLEIN BRETELER, A. J.:
Kinematische Getriebe-Analyse, eine iterative Methode mit Hilfe Finiter Elemente
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe1 Nr. 211, VDI-Verlag Düsseldorf, 1992
- [31] GÖCKE, H.; RÖßLER, J.:
KOGEAN - Ein Algorithmus zur vollautomatischen Analyse ebener Mechanismen
Wissenschaftl. Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt 15 (1973), Nr. 1, S. 203-248
- [32] RANKERS, A. M.:
SAM, Simulation and Analysis of Mechanism
Bedienungsanleitung für das Programm SAM der Fa. ARTAS
RJ Nuenen (Niederlande) 1994
- [33] VDI-RICHTLINIE 2729:
Modulare kinematische Analyse ebener Gelenkgetriebe mit Dreh- und Schubgelenken
VDI-Verlag Düsseldorf, 1995
- [34] FA. COCREATE SOFTWARE GMBH:
HP Precision Engineering / Konstruieren mit Me10, Sindelfingen 1998

- [35] BUCHHEIM, A.:
Rechenprogramm für geschlossenen fünfgliedrige Mechanismen.
TH Ilmenau, Diplomarbeit 1991
- [36] FA. PARAMETRIC TECHNOLOGIE CORPORATION:
Pro/MECHANICA, Modellieren in Motion
Waltham (USA) 1998
- [37] SPÄTH, H.:
Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen
R. Oldenbourg Verlag München, Wien 1973
- [38] RISCHEN, C.:
Erstellung von Softwaremodulen zur Durchführung einer methodischen Optimierung
mit Hilfe von vorhandenen dialoggesteuerten Programmen
Diplomarbeit Universität-GH Siegen, Siegen 1989
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [39] PAUWELS, M.:
Erstellen eines Rechnerprogramms zum Einteilen einer bewegten Ebene in Felder,
deren Punkte Bahnen mit gleicher Anzahl an Selbstschnittpunkten aufweisen.
Diplomarbeit Universität-GH Siegen, Siegen 1993
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [40] MANDERBACH, T.:
Erstellen eines Rechnerprogramms zum Einteilen der Koppellebene umlauffähiger
viergliedriger Gelenkgetriebe mit Hilfe der Gangpolkurve und der Übergangskurve
Diplomarbeit Universität-GH Siegen, Siegen 1994
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [41] MAUER, M.:
Ermittlung der typischen Koppelpunktbahnen der totalschwingfähigen Getriebe der
viergliedrigen Drehgelenkkette
Studienarbeit Universität-GH Siegen, Siegen 1991
(Betreuer: GIERSE, F. J., GÜNZEL, D.)
- [42] VDI-RICHTLINIE 2145:
Ebene viergliedrige Getriebe mit Dreh- und Schubgelenken
VDI-Verlag Düsseldorf, 1980
- [43] TYBUSSEK, J.:
Ermitteln der typischen Gangpolkurven, Übergangskurven und BALLSchen Kurven
von viergliedrigen durchschlagfähigen Gelenkgetrieben mit vier Drehgelenken
Studienarbeit Universität-GH Siegen, 1994
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)
- [44] LEHNIG, R.:
Erstellen eines Windowprogramms zum interaktiven Erzeugen und Variieren der
periodischen Bewegung einer Ebene
Diplomarbeit Universität-GH Siegen, 1994
(Betreuer: GIERSE, F. J., JÄKEL, V.)

- [45] HAIN, K.:
Koppelkurven mit Spitzen und ihre getriebetechnische Anwendung
Getriebetechnik 9 (1941)